Série 2ª LIVROS DIDÁTICOS Vol. 121
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

PROF. JACOMO STÁVALE

Elementos de Matemática

Segundo Volume

para a

Segunda Série do Curso Ginasial

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

HERMES BENJAMIN

Hermilo Souto Nóbrega

Elementos de Matemática

SEGUNDO VOLUME

Exemplar 1321

Jacomo Stávale

OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931.

Primeiro Ano de Matemática. *Dezenove edições,* 95 milheiros.
Volume cartonado .... Cr.$ 13,00

Segundo Ano de Matemática. *Treze edições,* 65 milheiros.
Volume cartonado .... Cr.$ 13,00

Terceiro Ano de Matemática. *Nove edições,* 45 milheiros.
Volume cartonado .... Cr.$ 15,00

Quarto Ano de Matemática. *Sete edições,* 35 milheiros.
Volume cartonado .... Cr.$ 13,00

Quinto Ano de Matemática. *Quatro edições,* 20 milheiros.
Volume cartonado .... Cr.$ 15,00

Geometria plana, obra completa para a terceira e a quarta série dos cursos ginasiais.
Volume cartonado .... Cr.$ 12,00

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942.

Elementos de Matemática, Primeiro Volume.
Volume cartonado .... Cr.$ 13,00

Elementos de Matemática, Segundo Volume
Volume cartonado .... Cr.$ 13,00

Elementos de Matemática, Terceiro Volume.
Volume cartonado .... Cr. $

Exercícios de Matemática — Primeiro Ano. 1 200 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.
Brochura .... Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Segundo Ano. 1 300 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.
Brochura .... Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Terceiro Ano. 1 400 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.
Brochura .... Cr.$ 6,00

Exercícios de Matemática — Quarto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.
Brochura .... Cr.$ 5,00

Exercícios de Matemática — Quinto Ano. 900 exercícios numéricos e problemas, com os resultados.
Brochura .... Cr.$ 5,00

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
RUA DOS GUSMÕES, 639 — SÃO PAULO

Série 2.ª LIVROS DIDÁTICOS Vol. 121
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

SEGUNDO VOLUME

para a

Segunda Série do Curso Ginasial

650 exercícios orais e de classe
720 exercícios escritos e problemas

Omnis scientia requirit mathematicam
BACON

1.ª edição – 5 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - PÔRTO ALEGRE
1943

Rio, 20 de outubro de 1938

Ilustre prof. Jacomo Siávale

Saudações.

Passando para a Reserva do Exército, em fins de 1935, para logo destinei o restante de minhas energias ao magistério particular, uma vez que sempre nutrí grande entusiasmo pelo ensino secundário.

Matemática, foi a matéria escolhida para lecionar, o que, aliás, já o fizera inúmeras vêzes, particularmente.

Encontrei para o exercício desta nobre militança, o programa do Colégio Pedro II, baixado com o decreto n.º 19890 de 18 de abril de 1931.

Lidas as instruções pedagógicas, ou sejam as novas diretrizes do ensino secundário, comecei a meditar nas dificuldades para o aluno, privado do manuseio de livros adequados à nova pedagogia.

Aparecem, porém, os primeiros compêndios articulados àquelas instruções. Adquiro alguns, leio outros, escritos, em geral, com extrema concisão, menos, portanto, para o aluno que para o próprio mestre.

Eis que, em 1937, resolvo apelar para a sua coleção. E, à proporção que penetro no assunto, vou sentindo, com justeza, o segredo do livro para o aluno, do livro que sòmente os verdadeiros pedagogos sabem fazer, porque sentem, de perto, as dificuldades do estudante moderno, obrigado a uma extensão de conhecimentos muito maior que os de outrora.

Leio um por um dos componentes do seu quinteto matemático, e acabo por adotá-los entre meus alunos, com absoluta confiança e serenidade, certo de que, em clareza, orientação e segurança, nenhum outro conjunto pode superá-los.

Os seus livros, escritos como foram com sobriedade, riqueza de exercícios, fecundidade de conceitos adequados à compreensão dos moços, afirmo com lealdade e entusiasmo, vão além das exigências modernas do ensino; e se enquadram tão bem aos intuitos do decreto acima citado, que é fácil prever o êxito, já assinalado, do brilhante serviço que o Amigo presta ao magistério secundário, e à mocidade estudiosa do Brasil.

(a) C.el Walfredo Reis

Prefácio

ÊSTE livro contém o desenvolvimento do programa de Matemática para a segunda série ginasial, de acôrdo com a portaria ministerial de 11 de julho de 1942.

Antes de iniciá-lo, tive de resolver um problema didático. As três primeiras unidades do programa em aprêço são as seguintes:

Unidade I — **Áreas**
Unidade II — **Volumes**
Unidade III — **Sistema métrico**

Por onde começar? Para seguir rigorosamente o programa, deveria começar pelas áreas. Mas, neste caso, não poderia lògicamente fazer aplicações das fórmulas a elas relativas, visto não ter ainda desenvolvido o capítulo do sistema métrico.

Começar pelo sistema métrico? Ver-me-ia também em situação embaraçosa, por não poder explicar o que são unidades de área e o que significam, sem que os estudantes saibam calcular a área de um retângulo ou a de um quadrado.

Resolvi a dificuldade fazendo o que a experiência me ensinou durante 44 anos de magistério. Comecei pelo sistema métrico; explicando as unidades de área e de volume, mostrei ao mesmo tempo como se determina a área do retângulo ou a do quadrado, assim como o volume do bloco retangular ou o do cubo.

Enfim, desenvolvendo o capítulo **Sistema métrico,** nele introduzí os pontos principais dos capítulos **Áreas** e **Volumes**, capítulos êstes que terminei no fim do compêndio.

* * *

Os srs. professores encontrarão no fim dêste volume, **os quadrados e os cubos dos números naturais**, de 1 a 1 000, e **as raízes quadradas e cúbicas** dêsses mesmos números, calculadas com êrro inferior a meio décimo milésimo, por falta ou por excesso. Estas tabelas, colhidas em ótima fonte, foram transcritas com excepcional cuidado, sendo pouco provável que nelas existam erros. Todavia, se algum êrro for encontrado, muito grato ficarei pela comunicação.

* * *

Espero, com invulgar interêsse, que os srs. professores se dignem escrever-me a respeito dêste compêndio.

Julgo indispensável uma crítica sincera, porém construtiva, em benefício dos nossos jovens alunos que serão amanhã uma radiosa mocidade firmemente entrincheirada para defender a honra e a integridade do nosso amado Brasil.

S. Paulo, fevereiro de 1943.

O AUTOR

Rua Safira, 9.

Prefácio da Primeira Edição

DO

SEGUNDO ANO DE MATEMÁTICA

E' indigno de se chamar homem, quem ignora que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.

Platão

SEM dúvida alguma, é bela e útil a nova orientação dada ao ensino da Matemática pela douta Congregação do Colégio Pedro II. Os quatro ramos da Matemática Elementar, convém que sejam ensinados paralelamente, desde o primeiro ano do curso ginasial. Mas o ensino simultâneo dêstes quatro ramos não pode ser feito atabalhoadamente, como o pretendem alguns autores. E' necessário que os jovens estudantes tenham os seus conhecimentos perfeitamente classificados, assim como se classificam os livros de uma biblioteca. *E é ainda necessário que tenham livros onde encontrem a reprodução fiel das lições de seus professores.* Acabemos com o caderno de apontamentos que é a causa principal da falência do ensino secundário, no Brasil.

Adquirirão assim uma sabedoria de gaveta, objetou-me, um dia, uma das figuras de maior relêvo no magistério paulista. Talvez ; mas esta gaveta não será a de um sapateiro. E, depois das longas férias de verão, quando, continuando o curso secundário, tiverem esquecido algumas das noções adquiridas no ano anterior,

saberão onde encontrá-las. E' tirar da gaveta o livro onde estudaram, e a recordação será rápida e suave.

Enquanto durar esta confusão no ensino da Matemática; enquanto os professores, por falta de livros adequados, ditarem as suas lições, assistiremos sempre, no fim do ano letivo, ao mesmo fenômeno doloroso e deprimente: os estudantes, com poucas e confusas noções relativas ao assunto sôbre o qual vão ser examinados, *fazem o que podem para passar;* aquelas poucas noções desaparecem como o orvalho ao calor das férias estivais e, no ano seguinte, os estudantes nada sabem do que aprenderam no ano anterior e *nada têm na gaveta.* E terminam o curso secundário, em regra geral, não sabendo calcular o custo de 36 centímetros de sêda a 25$000 o metro, o desconto de 5% em uma fatura, a área de um terreno qualquer, etc. . . .

E' o que estamos observando há vinte anos.

Correções, sugestões, críticas, verbalmente ou por carta, serão por mim recebidas com vivo prazer, em minha residência, rua Safira, 9.

São Paulo, março de 1932.

O AUTOR

Índice-Sumário

ARITMÉTICA PRÁTICA

Cap. I — Sistema métrico decimal

Cap. II — Potências e raízes

Cap. III — **Razões e proporções**

Cap. IV — **Grandezas proporcionais**

GEOMETRIA INTUITIVA

CAP. V — **Áreas**

CAP. VI — **Volumes**

ARITMÉTICA PRÁTICA

CAPÍTULO I

Sistema Métrico Decimal

1. Diferentes espécies de grandezas. Já aprendemos em que consiste uma grandeza. (E.M.P.V. § 41) (*) Vimos que as grandezas podem ser *contínuas* ou *descontínuas*. Um segmento de reta é uma grandeza contínua, *porque é um todo cujas partes não são distintas umas das outras*. Com efeito, podemos considerar um segmento de reta como sendo constituído por numerosos segmentos retilíneos consecutivos e colineares, (E.M.P.V. § 17) e êstes segmentos, *não distintos uns dos outros*, podem ser tantos quantos quizermos.

Uma pilha de livros é uma grandeza descontínua ou discreta *porque é um todo cujas partes são distintas umas das outras*; com efeito, em uma pilha de livros, cada parte é um livro.

Medir uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie, porém conhecida, definida, perfeitamente determinada. Esta segunda grandeza, perfeitamente determinada, é chamada **unidade.**

Portanto, para medir um segmento de reta, a unidade é outro segmento de reta; para medir um ângulo, a unidade deve ser outro ângulo; para medir uma superfície limitada, a unidade será outra superfície limitada; e assim por diante.

A medida de uma grandeza é um número concreto; 3 metros, 36 graus, 42 metros quadrados, 15 quilogramas, etc..

As grandezas medidas são chamadas quantidades.

(*) E.M.P.V. significa *Elementos de Matemática, Primeiro Volume*, do mesmo autor dêste compêndio.

A unidade para medir uma grandeza pode ser **arbitrária** *ou* **determinada.** E' *arbitrária,* quando a grandeza que se quer medir é contínua ; é *determinada,* quando a grandeza que se quer medir é descontínua. (E.M.P.V. §41)

A avaliação de uma grandeza descontínua não oferece dificuldade. **Medir,** por exemplo, uma pilha de livros, significa **contar** os livros que formam esta pilha. **Contar** é uma operação que aprendemos nos primeiros anos da escola primária, e é justamente da operação de contar que resulta a primeira noção do **número.** A grande dificuldade está na avaliação das grandezas ~~des~~contínuas.

A **Matemática** *é a ciência que tem por fim determinar as relações que existem entre as diferentes grandezas, de modo que se possam determinar umas por intermédio das outras.*

Veremos pouco a pouco, com numerosos exemplos, o significado desta definição. (§2)

2. Medição direta ou indireta de uma grandeza. Para medir uma grandeza temos de compará-la com outra da mesma espécie, tomada como unidade. *Esta comparação, porém, pode ser feita de um modo* **direto** *ou* **indireto.**

Queremos medir o comprimento de uma sala de aula. Tomamos o metro e verificamos quantas vêzes êle está contido no segmento que representa o comprimento da sala. E ficamos sabendo que a sala de aula tem, por exemplo, 12 metros de comprimento. O comprimento da sala foi obtido de um modo direto, isto é, aplicando a grandeza unidade sôbre o segmento que representa o comprimento da sala, tantas vêzes quantas foi possível.

Um segmento retilíneo é medido diretamente.

E o número resultante é chamado **comprimento** *do segmento retilíneo.* (*)

A grandeza de um ângulo também pode ser medida diretamente. Fazemos coincidir o ângulo dado com um ângulo igual do transferidor e verificamos que o ângulo dado mede, por exemplo, 48 graus.

Um ângulo é, em geral, medido diretamente.

(*) Convém observar que a medição de um segmento retilíneo muito extenso, por exemplo, um segmento com alguns quilômetros de comprimento, *pode ser feita indiretamente,* como aprenderemos mais tarde.

E o número resultante é chamado **amplitude** *do ângulo.* (E.M.P.V. § 22) (*)

A massa de um corpo, impròpriamente chamada pêso, (§ 22) é uma grandeza que também se mede, em geral, de um modo direto.

O mesmo acontece com o **tempo.** E' também uma grandeza que se avalia diretamente, com o auxílio de um cronômetro.

Vejamos agora em que consiste a medição indireta de uma grandeza. O exemplo mais simples, e que vamos apresentar neste parágrafo, é o da medição de uma certa porção de superfície plana e limitada, com a forma de um retângulo ou de um quadrado.

Suponhamos que dois meninos, Carlos e Raul, estão discutindo a respeito da superfície de dois terrenos retangulares, dos quais são os respectivos possuïdores. Não chegando a um acôrdo, procuram seu professor para que êste decida a questão. O professor lhes diz que é necessário **que meçam a superfície de seus terrenos,** para que se possa dizer qual é o maior. Mas os meninos respondem que não sabem medir uma superfície. Então o professor explica-lhes que **medir uma superfície limitada consiste em verificar quantas vêzes esta superfície contém outra superfície também limitada, conhecida,** e tomada como unidade.

Alguns dias depois voltam os dois meninos com o resultado de seus trabalhos. Diz Carlos que a superfície de seu terreno contém 240 vêzes a superfície de uma tábua e diz Raul que a superfície de seu terreno contém 75 vêzes a superfície de uma fôlha de zinco. E o professor responde-lhes que ainda não pode dizer qual dos dois terrenos é o maior, porque êle não conhece a superfície da tábua, nem a da fôlha de zinco. Para que êle possa dizer qual dos dois terrenos é o maior, é necessário que os dois meninos meçam a superfície de seus terrenos, **tomando como têrmo de comparação uma superfície conhecida,** por exemplo, **a superfície de um quadrado cujo lado mede um metro.**

(*) Aprenderemos mais tarde, quando estudarmos Trigonometria, que a amplitude de um ângulo pode ser obtida indiretamente.

Os dois meninos objetam que não podem medir a super fície de seus terrenos com o auxílio do metro quadrado, porqu êles não têm esta medida à sua disposição. Então, responde professor, vão ao carpinteiro e mandem fazer uma tábua com forma de um quadrado cujo lado meça um metro.

Armados com estas explicações, os dois meninos retiram-s para proceder novamente à avaliação de seus terrenos. Carlo verificou que o seu terreno tinha 96 metros quadrados e Rau verificou que o seu terreno tinha 84 metros quadrados.

O processo que o professor ensinou aos meninos para medi a superfície de um terreno, é o **processo direto.** Mas não usado por ser muito penoso e demorado. **Diretamente** só s medem os segmentos de reta, os ângulos, o tempo, etc..

Como proceder se quisermos medir diretamente a superfície d nossa sala de aula? Em primeiro lugar é necessário mandar faze uma tábua quadrada cujo lado meça um metro. Depois é necessári retirar da sala todos os móveis. Finalmente procuramos verifica quantas vêzes a superfície do metro quadrado está contida n superfície da sala. E ficamos sabendo que a nossa sala tem, po exemplo, 56 metros quadrados de superfície. (*)

Não é difícil perceber a grande dificuldade dêste process para medir superfícies.

Neste parágrafo quisemos apenas explicar em que consist a medição direta de uma superfície. A superfície escolhida par medir uma superfície qualquer, isto é, **a unidade de superfície,** é, em geral, o metro quadrado. Também pode ser o decímetr quadrado, o centímetro quadrado, etc..

O metro quadrado é um quadrado cujo lado mede um metro.

O decímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um decímetro.

O centímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um centímetro.

O milímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um milímetro.

(*) Os estudantes podem medir diretamente a superfície de um livro, de um caderno, de um estojo, etc., colocando êstes objetos sôbre uma fôlha de papel milimetrado.

Vejamos agora em que consiste a medição indireta de uma superfície retangular ou quadrada. Tracemos em papel milimetrado, um retângulo ABCD, com 8cm de comprimento (AB) e 6cm de largura (AD). Se contarmos os centímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que êles são 48, e diremos que a **área** do retângulo ABCD é de 48 centímetros quadrados. Ora, 48 é o produto de 8 (comprimento do retângulo) por 6 (largura do retângulo). Portanto,

8 *centímetros* × 6 *centímetros* = 48 *centímetros quadrados* (1)

Tracemos em papel milimetrado, um retângulo ABCD com 35mm de comprimento (AB) e 15mm de largura (AD). Se contarmos os milímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que êles são 525, e diremos que a **área** do retângulo ABCD, é de 525 milímetros quadrados. Ora, 525 é o produto de 35 (comprimento do retângulo) por 15 (largura do retângulo). Portanto,

35 *milímetros* × 15 *milímetros* = 525 *milímetros quadrados* (2)

Tracemos no quadro-negro um retângulo ABCD, com 7dm de comprimento (AB) e 5dm de largura (AD). Em seguida, tracemos dentro dêste retângulo, uma porção de paralelas, no sentido do comprimento e no sentido da largura. A distância entre duas paralelas consecutivas deve ser de 1dm, a contar de qualquer um dos vértices. Se contarmos os decímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que êles são 35, e diremos que a **área** do retângulo ABCD é de 35 decímetros quadrados. Ora, 35 é o produto de 7 (comprimento do retângulo) por 5 (largura do retângulo). Portanto,

7 *decímetros* × 5 *decímetros* = 35 *decímetros quadrados* (3)

Vamos ao recreio e tracemos no terreno um retângulo ABCD, com 12m de comprimento (AB) e 7m de largura (AD). Em seguida, tracemos dentro dêste retângulo, uma porção de paralelas, no sentido do comprimento e no sentido da largura. A distância entre duas paralelas consecutivas deve ser de 1 metro, a contar de qualquer um dos vértices. Se contarmos os metros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que êles são 84 e diremos que a **área** do retângulo ABCD é

de 84 metros quadrados. Ora, 84 é o produto de 12 (compr
mento do retângulo) por 7 (largura do retângulo). Portanto,

$$12 \textit{ metros} \times 7 \textit{ metros} = 84 \textit{ metros quadrados} \quad (4$$

Observando os quatro resultados a que chegámos (igualdad
1, 2, 3 e 4) podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para determinar a área de um retângulo, medem-se comprimento e a largura com a mesma unidade de compriment Em seguida, multiplicam-se os dois números obtidos. O resulta representa a área do retângulo, em quadrados cujo lado é igual unidade de comprimento escolhida para medir o comprimento e largura do mesmo retângulo.*

Metros multiplicados por metros dão metros quadr dos. O que se quer dizer com esta frase é o seguinte: *expr mindo o comprimento e a largura de um retângulo em metros, multiplicando os dois valores, o produto representa a área do r tângulo em metros quadrados.* Anàlogamente, decímetros mul plicados por decímetros dão decímetros quadrados, etc..

Para determinar a área de um quadrado é bastante med o comprimento de um de seus lados e multiplicar êste núme por si mesmo.

Se traçarmos em papel milimetrado um quadrado cujo la meça 7 centímetros, verificaremos imediatamente que êste qu drado contém 49 centímetros quadrados. Se o lado do quadra medir 30 milímetros, o quadrado conterá 900 milímetros qu drados. Se o lado de um terreno quadrado mede 12 metros, ês terreno contém 144 metros quadrados.

Chama-se *área* de um retângulo ou de um quadrado, o número que exprime quantas vêzes êste retângulo ou quadrado contém a unidade de superfície.

Observação. Acabámos de aprender, de um modo prático, como determina a área de um retângulo. E, ao mesmo tempo, apresentámos u primeira justificação da nossa definição da Matemática. (§ 1) Com efei foi necessário estabelecer a relação existente entre o comprimento, a largu e a área de um retângulo para que, por meio das duas primeiras grandez comprimento e largura, se pudesse determinar a terceira, isto é, a área retângulo.

3. Grandezas elementares. As grandezas elementares são três: o *comprimento*, a *massa* e o *tempo*. Estas três grandezas são chamadas elementares, porque delas se derivam as outras. (*)

Observação. Com a palavra *comprimento*, a grande maioria dos autores designa, indiferentemente, um segmento de reta, AB, e o número que exprime quantas vêzes êste segmento contém outro tomado como unidade, isto é, *a medida do segmento* AB.

Grandezas compostas *são as que se definem por meio de produtos ou quocientes de outras grandezas elementares ou compostas.* (*) Como exemplo de uma grandeza composta podemos citar a área de um retângulo a qual, como já vimos anteriormente (§ 2) resulta do produto de duas grandezas elementares, isto é, os comprimentos de dois lados consecutivos de um retângulo, chamados, em particular, *comprimento* e *largura* ou *base* e *altura* do mesmo retângulo.

Veremos adiante que o volume de um corpo é também uma grandeza composta, resultante do produto de três comprimentos, isto é, de três grandezas elementares, ou do produto de uma área por um comprimento, isto é, de uma grandeza composta por uma grandeza elementar. (§ 14)

A velocidade de um corpo em movimento é também uma grandeza composta. Suponhamos que um automóvel percorre 160 quilômetros em 5 horas. A velocidade (média) dêste automóvel é de $\frac{160}{5}$ quilômetros por hora, isto é, 32 $\frac{\textit{quilômetros}}{\textit{hora}}$.
Vemos assim que a velocidade é uma grandeza composta, resultante do quociente de duas grandezas elementares: o comprimento e o tempo.

Para medir uma grandeza contínua é necessário adotar uma unidade. As unidades escolhidas para medir as grandezas elementares são chamadas **unidades fundamentais absolutas.** No Brasil, as unidades fundamentais absolutas são o *metro*, o *quilograma* e o *segundo*, de acôrdo com o Decreto Lei n.º 4 257 de 16 de junho de 1939.

4. Unidades de comprimento. *A unidade legal de comprimento é o metro.* O metro é igual, aproximadamente, à quadragésima milionésima parte do meridiano terrestre, isto é, se dividirmos um meridiano terrestre em 40 000 000 de partes iguais,

(*) Euclides Roxo, *Unidades e Medidas*, págs. 14 e 15.

cada uma destas partes mede aproximadamente um metro. Dond resulta que a distância entre os dois polos da Terra, medida a longo de um meridiano, é de 20 000 000 de metros, aproximada mente, e a distância de um dos polos da Terra, ao equador ter restre, sempre medida ao longo de um meridiano, é de 10 000 00 de metros, também aproximadamente.

Às vêzes, o metro é uma unidade pequena para medir o com primento de uma linha; outras vêzes é grande. Eis por que o organizadores do sistema métrico estabeleceram outras unidade de comprimento maiores e menores do que o metro; são os *múl plos* e os *submúltiplos* do metro.

Chamam-se *múltiplos do metro*, as unidades de compriment maiores do que o metro, e *submúltiplos do metro*, as unidades d comprimento menores do que o metro.

O metro linear é a unidade principal de comprimento; seu múltiplos e submúltiplos são as unidades secundárias.

Os múltiplos usuais do metro são três: o decâmetro, o hectô metro e o quilômetro. Êstes nomes são constituídos pelas palavra gregas *deca*, *hecto* e *kilo*, ligadas à palavra *metro*. Ora, *deca* signific *dez*; *hecto* significa *cem*; *kilo* significa *mil*. Donde se conclue que

Um decâmetro vale 10 metros.
Um hectômetro vale 100 metros.
Um quilômetro vale 1 000 metros.

Os submúltiplos do metro são três: o decímetro, o centí metro e o milímetro. Êstes nomes são constituídos pelas pa lavras latinas *deci*, *centi* e *milli* ligadas à palavra *metro*. Ora *deci* significa *um décimo*; *centi* significa *um centésimo*; *mill* significa *um milésimo*. Donde se conclue que:

Um decímetro é a décima parte do metro.
Um centímetro é a centésima parte do metro.
Um milímetro é a milésima parte do metro.

MÚLTIPLOS...	quilômetro	(km)	=	1 000 metros
	hectômetro	(hm)	=	100 metros
	decâmetro	(dam)	=	10 metros
UNIDADE.....	metro	(m)	=	1 metro
SUBMÚLTIPLOS	decímetro	(dm)	=	0,1 do metro
	centímetro	(cm)	=	0,01 do metro
	milímetro	(mm)	=	0,001 do metro

(A)

O quadro A contém os nomes das unidades de comprimento, suas abreviaturas e seus valores em relação ao metro.

Entre outros múltiplos e submúltiplos do metro, devemos mencionar o *megâmetro* (1 000 000 de metros) e o *micron* (0,000 001 do metro ou 0,001 do milímetro) cujos símbolos respectivos são *Mm* e μ (letra grega que se lê *mu*).

Consideremos o número 37 548. E' um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 37 548 metros, o número tornar-se-à concreto, visto que se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que 1dam = 10m, 1hm = 100m e 1km = 1 000m. Logo,

O decâmetro é uma dezena de metros.
O hectômetro é uma centena de metros.
O quilômetro é um milhar de metros.

Então, voltando ao número 37 548m, conclue-se que:

O algarismo 8 representa metros.
O algarismo 4 representa decâmetros.
O algarismo 5 representa hectômetros.
O algarismo 7 representa quilômetros.

E, lembrando os princípios da numeração, teremos:

37 548m = 3 754,8dam = 375,48hm
37 548m = 37,548km

5. Os submúltiplos do metro e as frações decimais. Consideremos a fração decimal 3,758. E' um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 3,758 do metro ou simplesmente 3,758m, o número tornar-se-á concreto, visto que se menciona o nome da unidade. Já vimos que:

O decímetro é a décima parte do metro.
O centímetro é a centésima parte do metro.
O milímetro é a milésima parte do metro.

Então, voltando ao número 3,758m, resulta que:

O algarismo 3 representa metros.
O algarismo 7 representa decímetros.
O algarismo 5 representa centímetros.
O algarismo 8 representa milímetros.

Portanto, 3,758m = 37,58dm = 375,8cm = 3 758mm.

6. Mudança de unidade nas medidas de comprimento. Dizemos habitualmente que a unidade das medidas de comprimento é o metro. Não é bem verdade; o metro é a unidade principal das medidas de comprimento, mas não é a única unidade. A unidade das medidas de comprimento pode ser qualquer: o hectômetro, o centímetro, o quilômetro, o milímetro, etc.. Escolhe-se a unidade de acôrdo com a linha cujo comprimento se quer medir.

As conclusões a que chegámos nos dois parágrafos anteriores podem ser resumidas no quadro seguinte:

u. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
9	6	9	5,	3	4	7
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

(B)

Nos números que representam comprimentos, a unidade escolhida é indicada pela abreviatura correspondente, como se vê no quadro ao lado. Os números escritos neste quadro *devem ser lidos* assim:

3,58m	3 **metros**	e	58	*centímetros*
24,276dam	24 **decâmetros**	e	276	*centímetros*
38,95dm	38 **decímetros**	e	95	*milímetros*
93,456 78hm	93 **hectômetros**	e	45 678	*milímetros*
469,7cm	469 **centímetros**	e	7	*milímetros*
35,293 856km	35 **quilômetros**	e	293 856	*milímetros*

Consideremos o número 3,58m. De acôrdo com o quadro B, êste número contém 3m, 5dm e 8cm, e é igual a 35,8dm ou 358cm.

Consideremos o número 24,276dam. De acôrdo com o quadro B, êste número contém 2hm, 4dam, 2m, 7dm e 6cm. E é igual a 2,427 6hm ou 242,76m ou 2 427,6dm ou 24 276cm.

E assim por diante.

Portanto, a mudança de unidade nas medidas de comprimento é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

Exercícios orais

Reduzir os comprimentos que se seguem, à unidade indicada entre parênteses.

1. 1km (hm)
2. 1km (dam)
3. 1km (m)
4. 1km (dm)
5. 1km (cm)
6. 1km (mm)
7. 1hm (dam)
8. 1hm (m)
9. 1hm (dm)
10. 1hm (cm)
11. 1hm (mm)
12. 1dam (m)
13. 1dam (dm)
14. 1dam (cm)
15. 1dam (mm)
16. 1m (dm)
17. 1m (cm)
18. 1m (mm)
19. 1dm (cm)
20. 1dm (mm)
21. 1cm (mm)
22. 350mm (m)
23. 2 348mm (m)
24. 478cm (m)
25. 324dm (m)
26. 7,8dam (m)
27. 5,6hm (m)
28. 7,28km (m)
29. 9,7m (dm)
30. 2 389mm (dm)
31. 6 724cm (dm)
32. 8,26dam (dm)
33. 7,45hm (dm)
34. 4,38m (cm)
35. 56,27dm (cm)
36. 8,6dam (cm)
37. 3,7hm (cm)
38. 4,2km (cm)
39. 34,567mm (cm)
40. 8,7dm (mm)
41. 4,9m (mm)
42. 5,6dam (mm)
43. 3,81hm (mm)
44. 6,27km (mm)
45. 3 468m (dam)
46. 5 643dm (dam)
47. 47 528cm (dam)
48. 109 720mm (dam)
49. 4,367hm (dam)
50. 5,893km (dam)
51. 3,748m (hm)
52. 6 239dam (hm)
53. 45 786dm (hm)
54. 5,496km (hm)
55. 273 548mm (hm)
56. 2 376dam (km)
57. 37 563m (km)
58. 293 587dm (km)
59. 93,47dam (km)
60. 0,4 do km (m)
61. 0,37 do dam (mm)
62. 0,428 do hm (dm)
63. 0,93 do m (mm)
64. 0,56 do hm (dm)

Exercícios. Série I

Problemas sôbre medidas de comprimento

1. Calcular 3,27hm + 5 896dm + 23,8dam + 34 796cm + 47m + 658dm + 5,683km + 9dam.

2. Calcular em decímetros 8 396mm + 7 857cm + 9 394dm + 37m + + 8,529hm + 37,539 8dam + 67,3cm.

3. Calcular em decâmetros 3 799cm + 8km + 6 931m +9dam + + 3 854m + 85 728dm + 37hm + 3145 67mm.

4. Calcular em milímetros 614cm + 4,277dam + 856m + 344dm + + 2,57hm + 8km + 6,37hm + 52m.

5. Calcular o preço de 76,24m de sêda a Cr.$ 36,70 o metro.

6. Calcular o preço de 0,498m de sêda a Cr.$ 52,00 o metro.

7. Uma peça de sêda com 14,36m custa Cr.$ 530,00. Qual é o preço de um metro?

8. Um fio de platina com 2,537m custa Cr.$ 3 640,00. Qual é o preço de um decímetro?

9. Comprei sêda a Cr.$ 27,40 o metro e paguei Cr.$ 518,40. Quantos metros comprei?

N. B. Todas as vêzes que um quociente representa metros, deve ser calculado com três algarismos decimais.

10. Comprei sêda a Cr.$ 36,00 o metro e paguei Cr.$ 12,40. Quantos metros comprei? (Resolva-se êste problema com uma única operação.)

11. Comprei fio de platina a Cr.$ 400,00 o metro e gastei Cr.$ 42,80. Quantos metros comprei?

12. Um fio de aço com 346 metros é transformado em agulhas, cujo comprimento é de 0,042m. Vendendo estas agulhas a Cr.$ 0,06 a dúzia, qual será a importância recebida?

N. B. Se o dividendo e o divisor são comprimentos, é necessário reduzí-los à mesma unidade. Para dividir 27dam por 25dm, isto é, para verificar quantas vêzes uma linha com 25dm está contida em outra linha com 27dam, é necessário reduzir os dois comprimentos à mesma unidade.

13. Quantos degraus tem uma escada com 122,88m de altura, sendo a altura de cada degrau igual a 24cm?

14. Uma escada com 90,22m de altura, tem 347 degraus. Qual é a altura de cada degrau?

15. Dez postes estão colocados em linha reta. A distância entre dois postes consecutivos é de 9,37m. Qual é a distância do primeiro ao último poste?

16. Ao lado de uma estrada de ferro foi construída uma linha telegráfica. Se a distância entre dois postes consecutivos é de 32,8m, e se os postes são 13 675, qual é, em quilômetros, a distância do primeiro ao último poste?

17. Uma linha telegráfica tem 762,405km de comprimento. A distância que separa dois postes consecutivos quaisquer desta linha é de 53 metros. Qual é o número de postes?

18. Uma linha telegráfica tem 182km de comprimento. Os postes são 4 376 e são eqüidistantes. Qual é a distância entre dois postes consecutivos?

19. Plantam-se árvores em ambos os lados de uma avenida, a 18 metros umas das outras. A distância entre cada uma das extremidades da avenida e a primeira árvore é também de 18 metros. O comprimento da avenida é de 42,84hm. Calcular a quantia necessária para plantar estas árvores, se cada uma delas custa Cr.$ 3,70 e o trabalho custa Cr.$ 1,50 por árvore.

20. Um lavrador tem um terreno retangular de 264m por 154m. Quer plantar café nesse terreno. As mudas devem ser plantadas no sentido do comprimento e no sentido da largura, e de modo tal que, quer num sentido quer no outro, a distância entre duas mudas consecutivas seja de uma braça ou 10 palmos. (2,2m) Se cada muda custa Cr.$ 0,50 e o trabalho de plantá-la custa Cr.$ 0,34, em quanto ficarão as despesas desta plantação?

21. Cerca-se um terreno retangular de 570m por 360m, com um duplo fio de arame. Êste fio é pregado em estacas eqüidistantes umas das outras, havendo uma estaca em cada vértice do terreno. O intervalo entre duas estacas consecutivas é de 0,40m. Um rôlo de arame tem 360 metros e custa

Cr.$ 56,70. As estacas são pagas a Cr.$ 83,50 cada cento. Calcular o custo da cêrca.

22. A toeza de Paris mede aproximadamente 1,98m. Calcular em toezas a distância do polo Norte ao Equador, do polo Norte ao polo Sul, e o comprimento do meridiano terrestre.

23. O meridiano terrestre mede 40 000 000 de metros. Calcular o comprimento do grau do meridiano, do minuto e do segundo, com êrro inferior a 0,01m.

24. A circunferência da roda de um automóvel mede 1,86m. Quantas voltas darão as quatro rodas dêste automóvel, numa distância de 37hm?

25. Com 107,48m de um fio de metal, fiz pregos de 43,8mm cada um. Vendendo êstes pregos a Cr.$ 0,72 a dúzia, quanto recebi?

26. Uma sala mede 8,4m de comprimento por 6,5m de largura. Faz-se o assoalho desta sala com tábuas de 21dm de comprimento e 52mm de largura. A tábua é comprada à razão de Cr.$ 2,70 por metro linear. Calcular o custo do assoalho.

N. B. Para resolver êste problema, não é permitido calcular a área da sala e da tábua.

27. Em uma sala quadrada cujo perímetro mede 31 metros, extende-se um tapete quadrado cujos bordos ficam a 0,87m das paredes. Calcular o perímetro do tapete.

28. Para proteger um reservatório de água, de base quadrada, e com um perímetro de 791 metros, construiu-se uma cerca a 1,75m de distância dos bordos do reservatório. Pagou-se Cr.$ 3,80 por metro de cêrca. Calcular o custo de toda a cêrca.

29. Em um salão retangular de 18,7m por 12,9m, extende-se um tapete cujos bordos ficam a 0,53 das paredes. Calcular o perímetro do tapete.

30. Para proteger um campo de futebol com 138,7m de comprimento por 94,33m de largura, construiu-se uma cêrca a 3,49m de distância das linhas marginais do campo. Calcular o custo da cêrca à razão de Cr.$ 8,79 o metro.

31. Um terreno retangular mede 2,3578km por 75,64dam. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e de modo que o terreno fica dividido em 4 retângulos iguais. A largura das duas ruas é de 11,7m. Em seguida, cercam-se os quatro retângulos, pagando-se Cr.$ 3,80 por metro de cêrca. Calcular o custo das 4 cêrcas.

32. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro é de 117,4m, sendo o comprimento igual ao triplo da largura.

33. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 297,4m, sendo o comprimento igual ao quádruplo da largura.

34. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 438,6m, sendo o comprimento igual ao quíntuplo da largura.

35. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 52m, sendo a largura igual a três quintos do comprimento.

36. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 374m, sendo a largura igual a três sétimos do comprimento.

37. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 26,1m, sendo o comprimento igual a onze quartos da largura.

38. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 42,3m, sendo o comprimento igual a treze quintos da largura.

39. Um agrimensor mediu o comprimento de uma avenida, servindo-se de uma corrente metálica de dez metros (corrente do agrimensor) e achou 2 358,7m. Mas, em seguida, verificou que a corrente estava defeituosa, faltando 56mm para completar os dez metros que a corrente deve ter. Qual é o comprimento exato da avenida?

40. Um negociante vendeu 37,8m de sêda a Cr.$ 53,80. Mas, o metro com o qual êle mediu a sêda está errado, por ter 31mm mais do que o metro legal. Qual foi o seu prejuizo?

41. Um engenheiro mediu o comprimento de uma estrada de rodagem e achou 314,8km. Mais tarde verificou que tinha cometido um êrro para mais de 0,45m em cada hectômetro. Qual é o comprimento exato da estrada?

42. Comprei arame para cercar um terreno cujo perímetro é de 137,947dam. A cêrca deve ser feita com 3 fios. Mas, devido a uma grande baixa da temperatura, o arame diminuiu 4mm em cada metro. Quantos metros de arame devo comprar para concluir a cêrca?

43. Um fio de cobre, a zero graus, tem um comprimento de 4,37m. Qual será o comprimento dêste mesmo fio, a 60 graus se, para cada grau o fio aumenta de 0,000018 por metro?

44. Um fio de prata, a 60 graus, tem um comprimento de 9,25m. Qual será o comprimento dêste mesmo fio, a 25 graus se, para cada grau, o fio aumenta de 0,000019 por metro?

45. Uma fita de zinco, a zero graus, tem um comprimento de 14,8m. Qual será seu comprimento a 100 graus se, para cada grau, a fita aumenta de 0,00003 por metro?

46. O comprimento de duas peças de sêda é de 35,85m. Tiram-se 12,3m de cada uma das peças e o que resta da primeira é igual ao dôbro do que resta da segunda. Qual é o comprimento de cada peça?

47. O comprimento de três peças de brim é de 42,3m. Tiram-se 5,7m de cada uma das peças e então o resto da primeira é igual a 3 vêzes o resto da terceira, e o resto da segunda é igual a 2 vêzes o resto da terceira. Qual é o comprimento de cada peça?

48. Um trilho tem 15,8m de comprimento. Entre dois trilhos deixa-se um intervalo de 6,4mm. (por quê?) Quantos metros de trilhos serão necessários para construir uma estrada de ferro com 53,510132km e de linha dupla?

49. Pedro e Paulo vão a pé da praça da República até a Avenida Atlântica. Pedro percorre 123,8m por minuto e Paulo percorre 1,93m por segundo. Ao cabo de uma hora e três quartos, qual é a distância que separa os dois?

50. Dois automobilistas A e B partem de S. Paulo com destino ao Rio de Janeiro. O automobilista A parte às 6 horas da manhã com a velocidade média de 37,6km por hora. O automobilista B parte às 7 horas e 12 minutos com a velocidade média de 51,8km por hora. A que horas B alcançará A?

7. Unidades de superfície. Já vimos em que consiste a área de uma porção de superfície plana limitada. (§ 2) Na prática empregamos indiferentemente as palavras *área* e *superfície*, embora não signifiquem precisamente a mesma coisa. Não há grande mal nisto, contanto que não se perca de vista o seguinte:

Quando dizemos que a superfície de um terreno mede 320 *metros quadrados, queremos dizer que a área desta superfície limitada é de* 320 *metros quadrados.*

Uma área é uma grandeza composta. (§ 3) A unidade de área (ou de superfície) não é, pois, uma *unidade fundamental;* é **uma unidade derivada.**

A unidade de área é um quadrado cujo lado é tomado como unidade de comprimento.

Consideremos a figura 1. (pag. 16) Se o lado AB é tomado como unidade de comprimento, o quadrado ABCD será a unidade de área. Se AB mede um metro, ABCD é um metro quadrado; se AB mede uma braça, ABCD é uma braça quadrada; se AB mede um decâmetro, ABCD é um decâmetro quadrado; e assim por diante.

A unidade legal de área é o metro quadrado, isto é, a área de um quadrado cujo lado mede um metro de comprimento.

Assim como acontece com o metro linear, o metro quadrado pode ser muito grande ou muito pequeno para determinar uma área. Eis por que existem outras unidades de área, maiores e menores que o metro quadrado.

O metro quadrado é a unidade principal de área; seus múltiplos e submúltiplos são as unidades secundárias.

Voltemos à fig. 1. Se o lado AB mede um metro linear, e estando êste segmento dividido em dez partes iguais, resulta que o segmento AM mede um decímetro linear. Ora, o quadrado ABCD medindo um metro quadrado, resulta que o quadrado AMNO mede um decímetro quadrado. E a figura nos mostra que:

1 *metro quadrado* = **100** *decímetros quadrados*

Logo, *um decímetro quadrado é a centésima parte de um metro quadrado.*

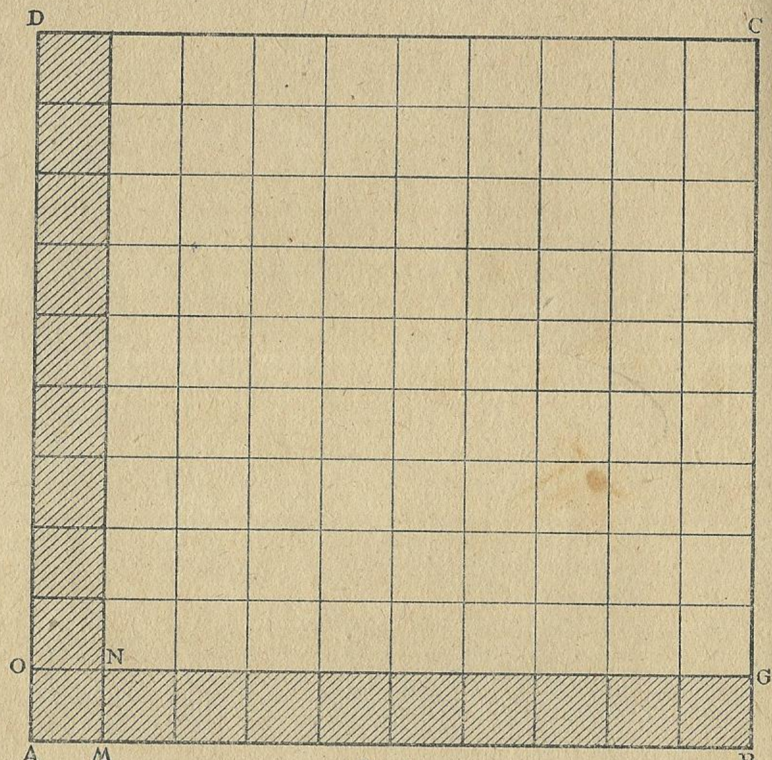


Fig. 1

E a faixa ABGO sendo a décima parte do metro quadrado ABCD resulta de pronto que:

0,1 *do metro quadrado* = **10** *decímetros quadrados*

Supondo que o lado AB meça um decímetro, ABCD será um decímetro quadrado, AMNO será um centímetro quadrado, e concluiremos que:

1 *decímetro quadrado* = **100** *centímetros quadrados*
1 *centímetro quadrado* = **0,01** *do decímetro quadrado*
0,1 *do decímetro quadrado* = **10** *centímetros quadrados*

Enfim, supondo AB igual, sucessivamente a um decâmetro, um hectômetro, um quilômetro, um centímetro, etc., estabeleceremos com facilidade as conclusões resumidas no quadro que se segue.

MÚLTIPLOS	quilômetro quadrado	(km^2)	=	1 000 000m^2
	hectômetro quadrado	(hm^2)	=	10 000m^2
	decâmetro quadrado	(dam^2)	=	100m^2
UNIDADE	metro quadrado	(m^2)	=	1m^2
SUBMÚLTIPLOS	decímetro quadrado	(dm^2)	=	0,01 do m^2
	centímetro quadrado	(cm^2)	=	0,000 1 do m^2
	milímetro quadrado	(mm^2)	=	0,000 001 do m^2

(C)

Nos parágrafos anteriores ficou explicado em que consiste a medição de uma porção limitada de superfície, como se calcula a área de um retângulo e a de um quadrado, etc.. Foi também explicado o que significam as seguintes frases:

metros × metros dão metros quadrados.
decímetros × decímetros dão decímetros quadrados.
centímetros × centímetros dão centímetros quadrados.
milímetros × milímetros dão milímetros quadrados.

8. Os submúltiplos do metro quadrado e as frações decimais. De acôrdo com o quadro (C) podemos estabelecer que:

$1m^2 = 100dm^2$	$1m^2 = 10\,000cm^2$	$1m^2 = 1\,000\,000mm^2$
$1dm^2 = 100cm^2$	$1dm^2 = 10\,000mm^2$	
$1cm^2 = 100mm^2$		

Se um m^2 tem **100**dm^2, **1**dm^2 *é a centésima parte do m^2.* Consideremos o número 3,48 (3 unidades e 48 centésimos). Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 3,48m^2, isto é, 3m^2 e 48 centésimos do m^2. Mas, centésimos do m^2 são decímetros quadrados. Logo, 3,48m^2 significa 3m^2 e 48dm^2. Consideremos o número 7,8m^2. São 7m^2 e 0,8 do m^2. Ora, 0,1 do m^2 tem 10dm^2; então 0,8 do m^2 são 80dm^2. Portanto, 7,8m^2 são 7m^2 e 80dm^2 ou 7,80m^2. Donde se conclue que, para ler números como 3,6m^2. . . 7,5m^2. . . 0,4m^2. . . convém juntar um zero à direita da parte fracionária, para dar a êstes números a forma 3,60m^2, 7,50m^2, 0,40m^2. Em seguida, ler-se-á 3m^2 e 60dm^2, 7m^2 e 50dm^2, 40dm^2.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. $3m^2$ e $7dm^2$	**5.** $2m^2$ e $30dm^2$	**9.** $1m^2$ e $346dm^2$
2. $28dm^2$	**6.** $238dm^2$	**10.** $2m^2$ e $600dm^2$
3. $5m^2$ e $1dm^2$	**7.** $3m^2$ e $525dm^2$	**11.** $7\,438dm^2$
4. $46dm^2$	**8.** $376dm^2$	**12.** $4m^2$ e $56dm^2$

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

13. $3{,}45m^2$	**15.** $0{,}59m^2$	**17.** $5{,}1m^2$	**19.** $647dm^2$
14. $5{,}58m^2$	**16.** $2{,}8m^2$	**18.** $13{,}8m^2$	**20.** $533dm^2$

Se um m^2 tem $10\,000cm^2$, $1cm^2$ é a décima milésima parte do m^2. Consideremos o número 7,005 8 (7 unidades e 58 décimos milésimos). Escrevendo *m^2* em lugar da vírgula, teremos $7{,}005\,8m^2$, isto é, $7m^2$ e 58 décimos milésimos do m^2. Mas, décimos milésimos do m^2 são centímetros quadrados. Logo, $7{,}005\,8m^2$ significa $7m^2$ e $58cm^2$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. $3m^2$ e $44cm^2$	**4.** $5m^2$ e $2\,358cm^2$	**7.** $56dm^2$ e $348cm^2$
2. $1m^2$ e $47cm^2$	**5.** $593cm^2$	**8.** $259dm^2$ e $37cm^2$
3. $2m^2$ e $346cm^2$	**6.** $47dm^2$ e $93cm^2$	**9.** $3m^2$, $5dm^2$ e $7cm^2$

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

10. $4{,}3628m^2$	**12.** $0{,}478m^2$	**14.** $0{,}1234m^2$
11. $0{,}5739m^2$	**13.** $0{,}001m^2$	**15.** $0{,}447m^2$

Se $1m^2$ tem $1\,000\,000mm^2$, $1mm^2$ é a milionésima parte do m^2. Consideremos o número 4,000057 (4 unidades e 57 milionésimos). Escrevendo *m^2* à direita dêste número, teremos $4{,}000057m^2$, isto é, $4m^2$ e 57 milionésimos do m^2. Mas, milionésimos do m^2 são mm^2. Logo, $4{,}000\,057m^2$ significa $4m^2$ e $57mm^2$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. $4m^2$ e $38mm^2$	**4.** $11m^2$ e $2\,578mm^2$	**7.** $15cm^2$ e $34mm^2$
2. $7m^2$ e $96mm^2$	**5.** $25\,748mm^2$	**8.** $3m^2$, $7cm^2$ e $9mm^2$
3. $5m^2$ e $387mm^2$	**6.** $7dm^2$ e $86mm^2$	**9.** $5dm^2$, $8cm^2$ e $6mm^2$

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

10. 3,574916m²	**12.** 2,405060m²	**14.** 0,572284m²
11. 0,84276m²	**13.** 0,22334m²	**15.** 7,63527m²

Consideremos o número 3,574829. Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 3,574829m². E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$
\begin{aligned}
3{,}574829\text{m}^2 &= 3\text{m}^2 + 57\text{dm}^2 + 48\text{cm}^2 + 29\text{mm}^2 \\
4{,}36827\text{m}^2 &= 4\text{m}^2 + 36\text{dm}^2 + 82\text{cm}^2 + 70\text{mm}^2 \\
5{,}4123\text{m}^2 &= 5\text{m}^2 + 41\text{dm}^2 + 23\text{cm}^2 \\
6{,}293\text{m}^2 &= 6\text{m}^2 + 29\text{dm}^2 + 30\text{cm}^2 \\
7{,}56\text{m}^2 &= 7\text{m}^2 + 56\text{dm}^2 \\
8{,}9\text{m}^2 &= 8\text{m}^2 + 90\text{dm}^2
\end{aligned}
$$

9. Mudança de unidade nas medidas de superfície. O metro quadrado é a *unidade principal* de área. Mas a unidade de área pode ser qualquer: o dam², o dm², o hm², o cm², etc.. Escolhe-se a unidade de área, de acôrdo com a porção de superfície limitada que se quer medir.

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro ao lado.

unidades	centésimos	déc. milés.	milionés.
3,	57	48	29
m²	dm²	cm²	mm²

(D)

Nos números que representam áreas a unidade escolhida é representada pela abreviatura correspondente.

Consideremos o número 3,475 2m². De acôrdo com o quadro D, êste número contém 3m², 47dm² e 52cm². E, 3,475 2m² = 347,52dm² = 34 752cm² = = 3 475 200mm².

Anàlogamente, 8,563 7dm² = 0,085 637m² = 856,37cm² = = 85 637mm².

Portanto, a mudança de unidade nas medidas de superfície é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

Exercícios em classe

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses

1. $8m^2$ (mm^2)	10. $0{,}56m^2$ (cm^2)	20. $0{,}437m^2$ (cm^2)
2. $9dm^2$ (cm^2)	11. $0{,}472m^2$ (mm^2)	21. $0{,}5863m^2$ (cm^2)
3. $7dm^2$ (mm^2)	12. $0{,}5793m^2$ (mm^2)	22. $0{,}3987m^2$ (dm^2)
4. $6cm^2$ (mm^2)	13. $3{,}8cm^2$ (mm^2)	23. $3{,}25m^2$ (dm^2)
5. $3{,}27m^2$ (mm^2)	14. $3{,}76cm^2$ (mm^2)	24. $0{,}698m^2$ (dm^2)
6. $0{,}85m^2$ (mm^2)	15. $0{,}4cm^2$ (mm^2)	25. $23m^2$ (dm^2)
7. $0{,}036m^2$ (mm^2)	16. $1{,}57cm^2$ (mm^2)	26. $9m^2$ (cm^2)
8. $0{,}4527m^2$ (mm^2)	17. $8{,}9m^2$ (cm^2)	27. $15m^2$ (mm^2)
9. $3{,}37dm^2$ (mm^2)	18. $7{,}36m^2$ (cm^2)	28. $36m^2$ (cm^2)
	19. $0{,}8m^2$ (cm^2)	

10. Os múltiplos do metro quadrado. Os múltiplos do metro quadrado são o dam^2, o hm^2 e o km^2 (quadro C). São quadrados cujos lados medem respectivamente 1dam, 1hm e 1km.

Voltemos à fig. 1.

Se AB = 1dam, então AM = 1m, ABCD será $1dam^2$, AMNO será $1m^2$ e teremos $1dam^2 = 100m^2$.

Se AB = 1hm, então AM = 1dam, ABCD será $1hm^2$, AMNO será $1dam^2$ e teremos $1hm^2 = 100dam^2$.

Se AB = 1km, então AM = 1hm, ABCD será $1km^2$, AMNO será $1hm^2$ e teremos $1km^2 = 100hm^2$.

$1km^2 = 100hm^2$	$1km^2 = 10\,000dam^2$	$1km^2 = 1\,000\,000m^2$
$1hm^2 = 100dam^2$	$1hm^2 = 10\,000m^2$	$1hm^2 = 1\,000\,000dm^2$
$1dam^2 = 100m^2$	$1dam^2 = 10\,000dm^2$	$1dam^2 = 1\,000\,000cm^2$

Seja o número 45 678 924. E' um número abstrato, porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos $45\,678\,924m^2$, o número tornar-se-á concreto, porque se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que $1dam^2 = 100m^2$, $1hm^2 = 10\,000m^2$, $1km^2 = 1\,000\,000m^2$. Portanto,

Um dam^2 é uma centena de m^2.
Um hm^2 é uma dezena de milhar de m^2.
Um km^2 é uma unidade de milhão de m^2.

Voltando ao número $45\,678\,924m^2$ e dividindo-o em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda, teremos :

$$45\,678\,924m^2 = 45km^2 + 67hm^2 + 89dam^2 + 24m^2$$

E, de acôrdo com os princípios da numeração,

$$45\,678\,924\text{m}^2 = 456\,789{,}24\text{dam}^2 = 4\,567{,}8924\text{hm}^2 =$$
$$= 45{,}678924\text{km}^2$$

Tudo o que dissemos nos parágrafos 7 a 10 pode ser resumido no quadro seguinte:

unid. de milhão	dez. de milhar	centenas	unidades	centésimos	décimos milés.	milionésimos
37	58	19	67	42	38	29
km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²

(E)

A mudança de unidade nas medidas de superfície é, pois, um problema facílimo. Observando o quadro E resulta que:

$$\begin{aligned} 37{,}859\,7\text{km}^2 &= 3\,785{,}97\text{hm}^2 = 378\,597\text{dam}^2 \\ 18{,}37\text{hm}^2 &= 0{,}183\,7\text{km}^2 = 1\,837\text{dam}^2 \\ 23{,}59\text{m}^2 &= 0{,}235\,9\text{dam}^2 = 0{,}00\,2359\text{hm}^2 \end{aligned}$$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 7,8dam² (dm²)
2. 8,396hm² (dm²)
3. 73 248cm² (dm²)
4. 4,7km² (dm²)
5. 37,6km² (m²)
6. 54,9hm² (m²)
7. 87,345dam² (m²)
8. 37 496,7m² (dam²)
9. 587 693cm² (dam²)
10. 23,8915hm² (dam²)
11. 8,39km² (dam²)
12. 147 528m² (hm²)
13. 376,57dam² (hm²)
14. 8,936km² (hm²)
15. 57 593m² (hm²)
16. 8 379m² (km²)
17. 37 586,9dam² (km²)
18. 623,7hm² (km²)
19. 375,6m² (cm²)
20. 1 385 927dm² (dam²)
21. 0,3km² (hm²)
22. 0,396hm² (m²)
23. 0,008km² (dm²)
24. 0,39dam² (dm²)
25. 0,0047dam² (cm²)
26. 0,3468dam² (m²)
27. 0,645hm² (dm²)

28. Tomando como unidade o metro quadrado, escrever no quadro negro os números seguintes: 3km² e 26dam²; 8km², 37dam² e 9dm²; 6hm², 47m² e 58cm², etc., etc..

29. E' dado o número 539 651,735 849m². Ler êste número de todos os modos possíveis.

Exercícios. Série II

Problemas sôbre medidas de superfície

1. Calcular em metros quadrados a área de um terreno retangul que mede 34,7dam de comprimento por 258,9m de largura.

2. Calcular em dam² a área de um terreno retangular que mede 7,45h de comprimento por 386m de largura.

3. Calcular em dm² a área de um terreno retangular que mede 27,34 de comprimento por 235dm de largura.

4. Calcular em dam² a área de um terreno quadrado cujo lado me 307,4m.

5. Calcular em dm² a área de um terreno quadrado cujo lado me 8,41m.

6. Calcular com êrro inferior a 0,001m o lado de um quadrado cu área é de 37,9m².

7. Calcular com êrro inferior a 0,001m o lado de um quadrado cu área é de 84,37m².

8. A área de um retângulo é de 47,56dam² e o comprimento é de 845d Calcular em metros a largura dêste retângulo, com êrro inferior a 0,001m.

9. A área de um retângulo é de 37,56m² e o comprimento é de 84,5d Calcular em metros, a largura dêste retângulo, com êrro inferior a 0,001m.

10. O perímetro de um retângulo é de 37,4m e o comprimento é o tripl da largura. Pede-se a área do retângulo.

11. O perímetro de um retângulo é de 37,2m e o comprimento é igu a cinco vêzes a largura. Pede-se a área do retângulo.

12. O perímetro de um retângulo é de 58,87m e a largura é igual a doi quintos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

13. O perímetro de um retângulo é de 5,58m e a largura é igual a trê sétimos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

14. Um terreno de forma retangular mede 647,5m por 328,7m. Abrem se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, e à igual distância do limites do terreno. Fica assim o terreno dividido em 4 quarteirões iguais A largura das ruas é de 11,8m. Calcular a área das duas ruas e a área do quatro quarteirões.

15. Comprei um terreno quadrado por Cr.$ 3 528,00, pagando Cr.$ 4,0 por metro quadrado. Calcular o lado dêste terreno, com êrro inferior a 0,001m

16. Comprei um terreno retangular por Cr.$ 1 626,20, pagando Cr.$ 4,7 por metro quadrado. Calcular as duas dimensões do terreno, com êrro inferior a 0,01m, sabendo que o comprimento é o triplo da largura.

17. Dois terrenos, um retangular e outro quadrado, são eqüivalentes, isto é, têm a mesma área. O retangular tem 17,8m de comprimento por 8,74m de largura. Calcular o lado do terreno quadrado com êrro inferior a 0,001m.

18. Quantas tábuas de 2,24m de comprimento por 0,18m de largura são necessárias para assoalhar uma sala de 17,8m de comprimento por 7,4m de largura?

19. Quantas pedras quadradas cujo lado mede 23cm são necessárias para calçar uma rua com 18m de largura e 23,38hm de comprimento?

20. Comprei um terreno com 78,5m de comprimento por 43,7m de largura, pagando Cr.$ 3,70 por metro quadrado. Mais tarde verifiquei que o terreno tinha 2,7m de mais no comprimento e 4,3m de menos na largura. Quanto paguei pelo terreno? Quanto devia ter pago?

21. Calcular $7{,}36\text{dam}^2 + 15{,}98\text{hm}^2 + 3\,270\text{m}^2 + 64\,790\text{dm}^2$.

Solução.

$$\begin{aligned} 7{,}36\text{dam}^2 &= 736{,}00\text{m}^2 \\ 15{,}98\text{hm}^2 &= 159\,800{,}00\text{m}^2 \\ 3\,270\text{m}^2 &= 3\,270{,}00\text{m}^2 \\ 64\,790\text{dm}^2 &= 647{,}90\text{m}^2 \\ \hline & \quad 164\,453{,}90\text{m}^2 \end{aligned}$$

Resposta. A soma pedida é $164\,453{,}90\text{m}^2$.

22. Calcular $3{,}8\text{m}^2 + 5{,}9\text{dm}^2 + 7{,}6\text{cm}^2 + 345\,000\text{mm}^2$.

23. Calcular $4{,}3\text{dam}^2 + 987\text{dm}^2 + 5\text{hm}^2 + 328\,600\text{cm}^2 + 93{,}574\text{m}^2 + 648{,}93\text{dm}^2 + 234\,568\text{cm}^2$.

24. Mediu-se a superfície de um quadrado e achou-se $10{,}692\,9\text{dam}^2$. Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir o lado do quadrado, estava errado, tendo 5mm mais do que o metro legal. Qual é, em metros quadrados, a área exata do quadrado?

25. Mediu-se a superfície de um retângulo e achou-se $0{,}103\,587\text{hm}^2$. Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir as duas dimensões do retângulo estava errado, tendo 4mm menos que o metro legal. Sendo o comprimento medido primitivamente igual a 47,3m, pergunta-se qual é, em metros quadrados, a área exata do retângulo.

26. Em um terreno de forma retangular o comprimento é o triplo da largura. Mediu-se o perímetro dêste terreno e achou-se 746,4m. Em seguida, verificou-se que a corrente estava defeituosa, faltando-lhe 6cm para os 10 metros legais que ela deveria ter. Pede-se a área exata do terreno.

27. Para ladrilhar um aposento com 7,48m de comprimento por 4,53m de largura, empregam-se ladrilhos quadrados cujo lado mede 0,32m e que custam Cr.$ 635,00 por milheiro. O operário encarregado dêste serviço ganha Cr.$ 13,70 por metro quadrado. Calcular a despesa total.

28. Cerca-se um jardim com 86,9m de comprimento por 45,7m de largura, com uma parede de 2,36m de altura, cuja construção custa Cr.$ 8,60 por metro quadrado. Calcular o custo da parede.

29. Construiu-se uma parede com 9,6m de comprimento por 3,14m de altura. A despesa com os tijolos foi de Cr.$ 3,70 por metro quadrado, pagando-se os tijolos a Cr.$ 92,00 cada milheiro. Quantos tijolos foram empregados na construção desta parede?

30. Um rôlo de papel tem 7m de comprimento e 0,36m de largura. Uma sala tem 8,5m de comprimento, 6,4m de largura e 4,2m de altura. Tem três janelas que medem 1,98m por 0,85m cada uma e duas portas que medem 2,8m por 1,2m cada uma. O rodapé da sala tem 0,22m de altura. Quantos rolos de papel serão necessários para forrar as 4 paredes desta sala?

31. A superfície de um livro é de 0,28m por 0,18m. Quantos metros quadrados de papelão serão necessários para cartonar 3 640 livros?

32. Um telhado retangular tem 24,7m por 13,5m. Uma telha mede 0,45m por 0,22m. Fazendo o telhado verifica-se que, ao colocar uma telha sôbre a outra, cada uma delas perde 0,04m na largura. As telhas custam Cr.$ 65,00 cada cento. Calcular o custo do telhado e o número de telhas nele existente.

33. Um páteo de forma retangular tem 96 metros por 43,5m. Faz-se neste páteo, ao longo das paredes, um passeio com 2,20m de largura. Calcular a área do passeio e a do retângulo por êle limitado.

34. Comprei um terreno de forma quadrada, pagando Cr.$ 5,00 por metro quadrado. As plantações feitas neste terreno rendem Cr.$ 4 500,00 por ano e esta quantia representa 12 % da quantia que o terreno me custou. Calcular o lado do terreno, com êrro inferior a 0,001m.

11. Unidades agrárias. São as unidades que se empregam para avaliar a superfície de terras cultivadas, fazendas, pastagens, campos, matas, etc.. São unidades de superfície com nomes particulares, de acôrdo com o fim a que se destinam.

São três: o hectare, o are e o centiare. A unidade é o are que é igual a um decâmetro quadrado. O are tem um múltiplo que é o hectare e um submúltiplo que é o centiare. O are é a unidade legal.

MÚLTIPLO ...	{ hectare (ha)	=	$1hm^2$	= 100 ares	
UNIDADE	{ are (a)	=	$1dam^2$	= 1 are	(F)
SUBMÚLTIPLO	{ centiare (ca)	=	$1m^2$	= 0,01 do are	

Os lavradores medem suas terras em alqueires. São usados no interior do Brasil, duas espécies de alqueires: o alqueire paulista, com 5 000 braças quadradas e o alqueire mineiro, com 10 000 braças quadradas.

A braça quadrada é um quadrado cujo lado mede 2,2m. Portanto,

1 braça quadrada = $4{,}84m^2$
1 alqueire paulista = 5 000 braças quadradas = $24\,200m^2$
1 alqueire mineiro = 10 000 braças quadradas = $48\,400m^2$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 3,75a (ca)
2. 4,78ha (ca)
3. 3,96ha (ca)
4. 476 528ca (ha)
5. 374 289ca (ha)
6. 493,38a (ha)
7. 3,6718ha (ares)
8. 316 729ca (ares)
9. 47,8m^2 (ca)
10. 3 726ca (m^2)
11. 2,29ha (m^2)
12. 3,476a (m^2)
13. 5,36hm^2 (ca)
14. 3,48hm^2 (ca)
15. 17,96dam^2 (ca)
16. 8,59m^2 (ca)
17. 17,6dm^2 (ca)
18. 32,478cm^2 (ca)
19. 9,7km^2 (ha)
20. 12,86hm^2 (ha)
21. 36,79dam^2 (ha)
22. 3 478,6m^2 (ha)
23. 678 596dm^2 (ha)
24. 3,47a (dm^2)
25. 8,96ca (dm^2)
26. 49,85ca (m^2)
27. 2,479 6a (m^2)
28. 3,182 79ha (m^2)
29. 6 473,8m^2 (ca)
30. 12 356,7m^2 (ares)
31. 4,46dam^2 (ares)
32. 293 756,8m^2 (ha)
33. 9 237,56m^2 (ares)
34. 123,38dam^2 (ares)
35. 3,97hm^2 (ares)
36. 6km^2 (ares)
37. 374 568m^2 (ares)
38. 8,37ha (dm^2)
39. 0,84ha (dm^2)
40. 30,72ha (dam^2)
41. 97,48a (dam^2)
42. 3 758,96ca (dam^2)
43. 0,2356ha (dam^2)
44. 3,427a (cm^2)
45. 15,89ca (cm^2)
46. 0,0478ha (cm^2)
47. 376,84ha (hm^2)
48. 936 527a (hm^2)
49. 3 268dm^2 (ares)
50. 648,93a (dm^2)

Exercícios. Série III

Problemas sôbre medidas agrárias

1. Reduzir a ares 3,27ha + 528,69a + 37 586ca + 6,28dam^2 + 9,37hm^2 + 6 328m^2.

Solução.

3,27ha	=	327,00a
528,69a	=	528,69a
37 586ca	=	375,86a
6,28dam^2	=	6,28a
9,37hm^2	=	937,00a
6 328m^2	=	63,28a
Resposta.		2 238,11a

2. Reduzir a hectares 8,47km^2 + 23,9hm^2 + 567,48dam^2 + 23 758m^2 + + 32,85ha + 6 279,47a + 345 600ca.

Solução.

8,47km^2	=	8 470 000m^2
23,9hm^2	=	239 000m^2
567,48dam^2	=	56 748m^2
23 758m^2	=	23 758m^2
32,85ha	=	328 500m^2
6 279,47a	=	627 947m^2
345 600ca	=	345 600m^2
Resposta.		10 091 553m^2 = **1 009,155 3ha**

3. Calcular em ares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 47,8m.

4. Calcular em hectares a área de um terreno retangular com 8,45km de comprimento por 34,6hm de largura.

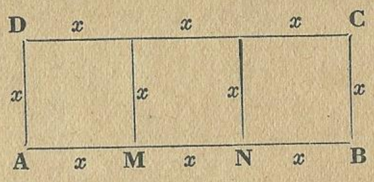
5. Um terreno quadrado tem uma área de 37,9a. Calcular o lado dêste terreno, em metros, com êrro inferior a 0,001m.

6. Um terreno retangular mede 3,4728ha. O comprimento é de 29,5dam. Calcular a largura dêste terreno, em metros, com êrro inferior a 0,01m.

7. Um terreno retangular mede 8,52a e o comprimento é o triplo da largura. Calcular as duas dimensões em metros, com êrro inferior a 0,001m.

Vamos desenhar um retângulo cujo comprimento seja o triplo da largura. Seja x a largura; o comprimento será $3 \times x$, isto é, $x+x+x$.

Na figura, a largura está representada pelo segmento AD e o comprimento pelo segmento AB ou pela soma dos segmentos AM, MN e NB, cada um dos quais é igual a x. Pelos pontos M e N tracemos perpendiculares a AB. O retângulo ABCD ficará dividido em 3 quadrados iguais. A área do retângulo ABCD é de 8,52a ou 852m². Então a área de um dos quadrados é $852m^2 \div 3$, isto é, 284m². Conhecida a área do quadrado, fàcilmente se obtém o comprimento de um de seus lados, isto é, de x.



8. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de 14,8a, sendo a largura igual a um sétimo do comprimento.

9. Calcular as dimensões de um retângulo cuja área é de 322 ares, sendo a largura igual a dois quintos do comprimento.

10. Calcular o valor de um terreno com 34,9dam de comprimento por 78,5m de largura a Cr.$ 3,70 cada centiare.

11. Comprei um terreno com 8,4a por Cr.$ 3 990,00. Quanto pagarei por um terreno do mesmo valor que o primeiro e com uma área de 37,53ha?

12. Comprei um terreno com 37,4a por Cr.$ 1 892,00. Quantos metros quadrados do mesmo terreno eu poderia comprar com Cr.$ 50 000,00?

13. Um terreno com 48 metros de largura foi vendido ao preço de Cr.$ 4,50 por are e custou Cr.$ 7 380,00. Qual é o seu comprimento?

14. Um campo retangular mede 120 metros de comprimento por 84 de largura. Cada are dêste campo produz 3 hectolitros de trigo. Vendendo-se cada hectolitro a Cr.$ 64,00, qual é o valor de toda a colheita?

15. Comprei três terrenos. O primeiro é quadrado, seu lado mede 85 metros e paguei Cr.$ 8,00 por centiare; o segundo é retangular, com 15,7dam de comprimento por 128m de largura e paguei Cr.$ 0,04 por decímetro quadrado; o terceiro tem uma área de 3,46hm² e paguei Cr.$ 325,00 por are. Quanto paguei pelos três terrenos? Qual é a sua área total em ares?

16. Calcular o valor de dois terrenos, o primeiro com 4ha7a8ca e o segundo com 5ha12ca, a Cr.$ 3,00 por metro quadrado.

17. Reduzir a metros quadrados 3,47ha + 58,28a + 837,9ca.

18. Reduzir a hectares 846km² + 35,87hm² + 96,25hm² + 1 234,62dam² + + 647 548m².

19. Calcular em hectares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 3,25km.

20. Calcular em hectares a superfície de um terreno retangular com 48km de comprimento e 376hm de largura.

21. Uma fazenda tem uma área de 435,8 alqueires paulistas. Qual é a sua área em ares?

22. Uma fazenda tem uma área de 45,8km². Qual é a sua área em alqueires paulistas?

23. Uma fazenda de forma retangular tem 246 alqueires paulistas. Sendo o seu comprimento igual a 4,36km, qual é a sua largura em decâmetros?

24. Um milharal tem 47 alqueires paulistas. Cada braça quadrada dêste milharal produz 75 litros de milho que se vende a Cr.$ 1,30 o litro. Calcular o valor da colheita.

25. Calcular em alqueires paulistas a área de uma chácara retangular que tem 2 450 braças de comprimento por 860 braças de largura.

12. O volume de um corpo. Medir um segmento de reta é verificar quantas vêzes êste segmento contém outro tomado como unidade. O segmento tomado como unidade é, em geral, o metro, e desta comparação resulta um número que é o **comprimento do segmento.**

Medir uma porção limitada de superfície, uma superfície fechada, é verificar quantas vêzes esta superfície limitada contém outra superfície também limitada e tomada como unidade. A superfície limitada tomada como unidade é, em geral, o metro quadrado, e desta comparação resulta um número que é a *área* da superfície limitada.

Medir o volume de um corpo é verificar quantas vêzes o volume dêste corpo contém outro volume tomado como unidade. Mas, qual é o volume que deve ser tomado como unidade? Para avaliar o volume de uma sala, qual é o volume que devemos tomar como unidade? Se nos disserem que o volume de uma sala contém 240 vêzes o volume de uma caixa, é claro que não podemos fazer idéia do volume da sala, porque há caixas de todos os tamanhos, e nós não conhecemos o tamanho da tal caixa que cabe 240 vêzes na sala. Precisamos, pois, escolher uma unidade de volume que todos conheçam.

13. O bloco retangular. O bloco retangular já foi definido. (E.M.P.V. § 40) Consideremos o bloco retangular AG. (fig. 2, pag. 28)

A superfície dêste bloco se divide em seis porções chamadas **faces.** *As faces de um bloco retangular são retângulos, e êstes retângulos são iguais, dois a dois ;* algumas vêzes, duas faces opostas de

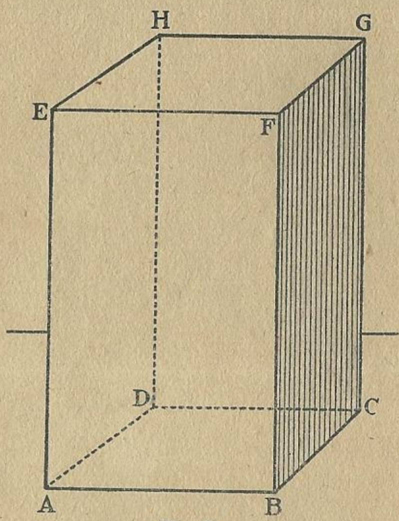


Fig. 2

um bloco retangular, *sempre iguais*, podem ser quadradas. Assim, considerando o bloco AG (fig. 2)

face ABCD = *face* EFGH
face BFGC = *face* AEHD
face ABFE = *face* DCGH

As faces ABCD e EFGH são as *bases* do bloco ; ABCD é a *base inferior* e EFGH é a *base superior*. Estas denominações são relativas, porque qualquer face do bloco pode servir-lhe de base. Entretanto, é habitual dizer que as faces horizontais são as bases do bloco ; **as faces verticais são as faces laterais.**

Um bloco retangular pode ter quatro faces iguais ; não pode ter as seis faces iguais porque, neste caso, seria um cubo.

Os lados das faces são as **arestas** do bloco retangular; AB, AD, AE, etc., são arestas. Os vértices das faces são os **vértices** do bloco retangular; os pontos A, B, C, D, etc., são os vértices do bloco.

Consideremos o vértice A, e as arestas AB, AD e AE, que têm um ponto comum A. Estas três arestas são chamadas **dimensões** *do bloco retangular*. Uma das dimensões é o *comprimento* do bloco ; outra é a *largura ;* outra é a *altura*. Estas denominações são relativas ; por exemplo, a aresta AB tanto pode representar o comprimento, como a largura ou a altura do bloco.

Exercícios orais

1. Quantas faces tem um bloco retangular?
2. Ler a face anterior do bloco retangular (fig.2); a face posterior; a lateral direita; a lateral esquerda; a base inferior; a base superior.
3. Ler as arestas verticais; ler as arestas horizontais.
4. Ler as dimensões do bloco.

Observação. Desenhar o mesmo bloco no quadro negro, de modo que a base inferior fique sendo o retângulo ABFE, e repetir os quatro exercícios anteriores.

14. O cubo; o decímetro cúbico e o centímetro cúbico. O cubo é um bloco retangular cujas faces são iguais. (fig. 3) Cada uma das faces é um quadrado. As doze arestas são iguais.

Observação. Convém explicar aos estudantes qual a razão do desenho não representar, como quadrados, duas das faces laterais, assim como as duas bases. E' conveniente mostrar à classe um decímetro cúbico de madeira ou de cartolina.

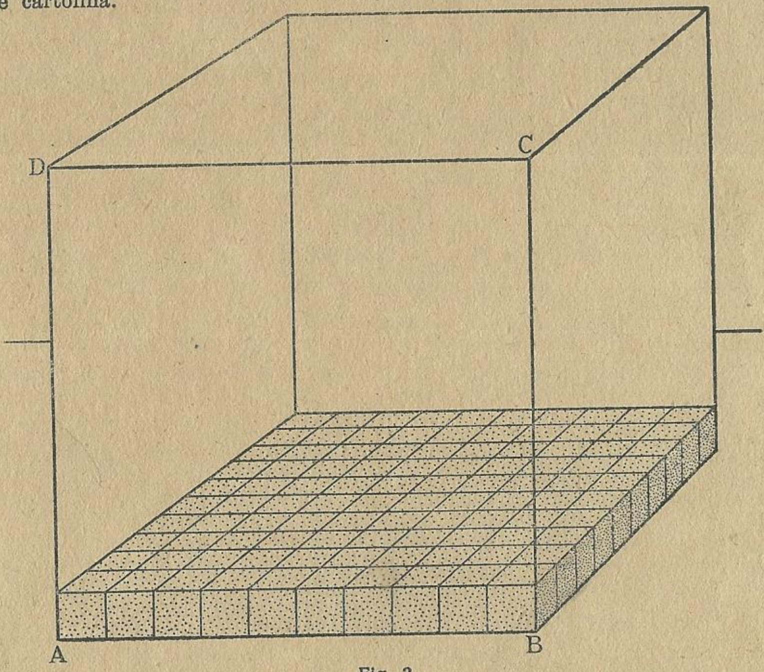
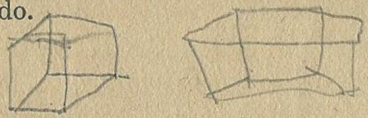


Fig. 3

Suponhamos que a aresta AB do cubo mede **um decímetro.** Neste caso, qualquer uma das faces do cubo, por exemplo, a face ABCD, é **um decímetro quadrado.** E diremos, então, que o cubo representado pela fig. 3 é **um decímetro cúbico.**

O decímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um decímetro de comprimento. Cada face do decímetro cúbico é um decímetro quadrado.



E, como nós temos uma noção exata do decímetro e do decímetro quadrado, estamos em condições de ter também uma noção exata do decímetro cúbico. E se nos disserem que uma pedra tem um volume de 5 decímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da **extensão** desta pedra. Portanto, o decímetro cúbico é uma unidade de volume. Mas não é a única, como veremos adiante.

Continuemos a examinar o cubo representado pela figura 3. E' um decímetro cúbico. Cada uma de suas faces é um decímetro quadrado. Cada uma de suas arestas é um decímetro linear ou simplesmente um decímetro. A aresta AB está dividida em 10 partes iguais; logo, cada uma destas partes é um centímetro. E, supondo que a figura 3 represente uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico, o que nós estamos vendo no fundo desta caixa são 100 pequenos cubos, dispostos em 10 linhas, cada uma das quais tem 10 cubos. A face de cada um dêstes cubos é um centímetro quadrado, porque estas faces são quadrados cujos lados medem um centímetro. Cada um dêstes pequenos cubos é **um centímetro cúbico.**

O centímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um centímetro de comprimento. Cada face do centímetro cúbico é um centímetro quadrado.

E como nós temos uma noção exata do centímetro e do centímetro quadrado, estamos também em condições de ter uma noção exata do centímetro cúbico. E se nos disserem que um cristal tem um volume de 4 centímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da extensão dêste cristal. Portanto, o centímetro cúbico é também uma unidade de volume. Mas ainda há outras.

Voltemos à figura 3. Continuemos a imaginar que esta figura representa uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico. No fundo desta caixa estamos vendo uma camada constituída por 100 centímetros cúbicos. Ora, é evidente que, se quisermos encher a caixa com 100 centímetros cúbicos, precisamos de mais nove camadas de centímetros cúbicos iguais à que está no fundo da caixa. Portanto, esta caixa contém 10×100 centímetros cúbicos ou 1 000 centímetros cúbicos, isto é, 1 decímetro cúbico tem 1 000 centímetros cúbicos.

15. O metro cúbico. Se cada aresta do cubo representado pela figura 3 (§ 14) tivesse um metro de comprimento, cada uma de suas faces seria um metro quadrado e a figura 3 representaria um metro cúbico. Portanto, **o metro cúbico é um cubo cujas arestas têm um metro de comprimento.** Mas, se a figura 3 representar um metro cúbico, os 100 cubos que estão situados no fundo dêste metro cúbico serão decímetros cúbicos. E chegaremos fàcilmente à conclusão que 1 metro cúbico tem 1 000 decímetros cúbicos. **O metro cúbico é a unidade principal de volume.**

16. Volume do bloco retangular. A nossa figura representa um bloco retangular cujas três dimensões, BA, BC e BD medem respectivamente 4cm, 3cm e 6cm. Suponhamos que êste bloco representa uma caixa vazia que nós queremos encher com dados, cada um dos quais seja exatamente *um centímetro cúbico.* E' fácil compreender que a primeira camada de dados será cons-

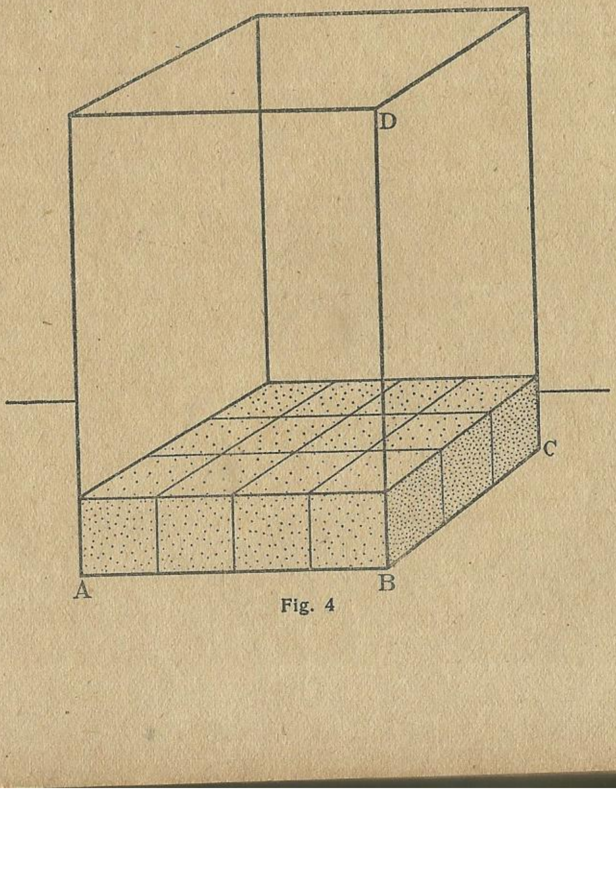


Fig. 4

tituída por 4×3 ou 3×4 dados, isto é, 12 dados. E observando que, para encher esta caixa são necessárias 6 camadas, cada uma com 12 dados, conclue-se que o número total de dados que esta caixa contém é $4 \times 3 \times 6$ ou $3 \times 4 \times 6$ dados. Cada um dos dados sendo um centímetro cúbico, diremos que **o volume dêste bloco é 72 centímetros cúbicos.**

Para maior clareza apresentamos, subdividido em quatro porções (fig. 5) o mesmo bloco retangular ABCD (fig. 4) para que se veja que êle contém realmente $27 dm^3$.

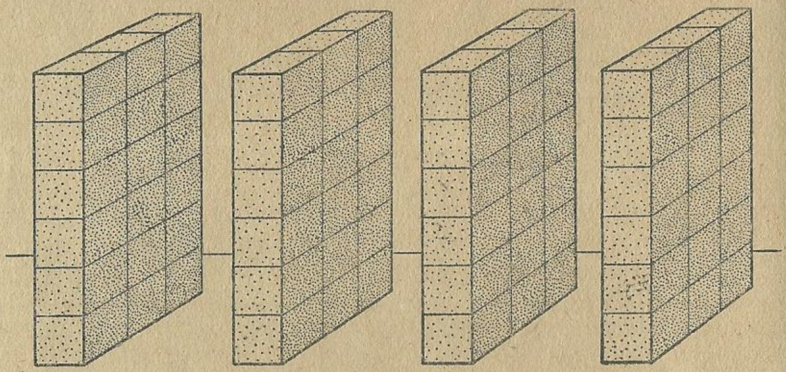


Fig. 5

Se as dimensões de um bloco retangular são 5cm, 6cm e 8cm, um raciocínio análogo nos mostrará que o volume do bloco é $5 \times 6 \times 8 = 240$ centímetros cúbicos. Sendo 4dm, 5dm e 10dm, o volume será 200 decímetros cúbicos. Sendo 7m, 4m e 11m, o volume será 308 metros cúbicos. Podemos pois estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular o volume de um bloco retangular, é bastante calcular o produto das suas três dimensões, medidas com a mesma unidade de comprimento.*

E, se observarmos que o produto das dimensões BA e BC do bloco representa a área da base do mesmo bloco, concluiremos que:

O volume de um bloco retangular é igual ao produto da área da base do bloco pela altura do mesmo bloco.

Convém não esquecer que:

m × m × m	= *metros cúbicos*
dm × dm × dm	= *decímetros cúbicos*
cm × cm × cm	= *centímetros cúbicos*

Exercícios em classe

Área lateral de um bloco retangular *é a soma das áreas das quatro faces laterais.*

Reunindo a área lateral com a área das duas bases, teremos a *área total* do bloco retangular.

1. Desenhar um bloco retangular (fig.4) no qual a aresta BA meça 6cm, a aresta BC, 5cm, e a aresta BD, 8cm. Quantos centímetros cúbicos contêm êste bloco? Qual é o seu volume? Qual é a área da base? E da face oposta à base? E da face lateral direita? E da face lateral esquerda? E da face anterior? E da face posterior? Qual é a área lateral do bloco? E a área total?

2. Um reservatório de água mede 12 metros de comprimento, 7 metros de largura e 5 metros de profundidade. E' alimentado por um adutor que, ao cabo de uma hora, faz o nível da água subir de um metro. Às 6 horas da manhã, estando o tanque vazio, abre-se o adutor. Qual será o volume de água existente no reservatório, às 7 horas da manhã? E às 8 horas? E às 9 horas? E às 10 horas? E às 11 horas?

17. Volume do cubo. Considerando a fig. 3 (§ 14) e supondo que a aresta dêste cubo meça 10 centímetros, já vimos que êste cubo pode conter 1 000 centímetros cúbicos. E diremos que o volume dêste cubo é 1 000 centímetros cúbicos.

Supondo que a aresta de um cubo meça 6 centímetros, e raciocinando como no parágrafo anterior, fàcilmente concluiremos que o volume do cubo é $6 \times 6 \times 6 = 216$ centímetros cúbicos.

Se a aresta medir 5 decímetros, o volume do cubo será $5 \times 5 \times 5 = 125$ decímetros cúbicos. E assim por diante. Portanto,

Regra. *Para calcular o volume de um cubo, mede-se o comprimento de uma das arestas, e eleva-se êste comprimento à terceira potência. O resultado representa o volume do cubo em cubos cuja aresta é igual à unidade de comprimento que foi escolhida para medir a aresta.*

Exercícios em classe

1. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 6cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém êste cubo?

2. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 7cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém êste cubo?

3. Vejo uma pedra de forma cúbica, cuja aresta mede 8dm. Quantos dm quadrados contém cada uma de suas faces? Quantos dm cúbicos de pedra podem ser feitos com esta pedra?

4. A nossa sala de aula tem a forma de um cubo. O comprimento da sala é de 9 metros. Qual é a largura? Qual é a altura? Quantos metros quadrados contém o assoalho? E o fôrro? E cada uma das paredes? Qual é a superfície da sala? Qual é o volume da sala?

18. O volume é uma grandeza composta. O volume é uma grandeza composta. (§ 3) Com efeito, êle é o produto de três comprimentos, isto é, as três dimensões de um bloco retangular ou de um cubo; é também o produto de uma área por um comprimento, isto é, a área da base de um bloco retangular ou de um cubo, pela altura do mesmo bloco ou cubo.

A medição direta de um volume é uma operação dificílima, senão impossível. A nossa sala de aula tem a forma de um bloco retangular. Se quiséssemos medir diretamente o volume da nossa sala, deveríamos enchê-la com metros cúbicos feitos de madeira ou de qualquer outra substância e, depois, contar êstes cubos. E' fácil de perceber a dificuldade dêste processo de medir.

19. As unidades de volume. A unidade legal das medidas de volume é o metro cúbico; já foi definida. (§ 15) O metro cúbico é a unidade principal de volume; seus múltiplos e submúltiplos são as unidades secundárias.

MÚLTIPLOS	quilômetro cúbico (km^3)	=	1 000 000 000m^3	
	hectômetro cúbico (hm^3)	=	1 000 000m^3	
	decâmetro cúbico (dam^3)	=	1 000m^3	
UNIDADE	metro cúbico (m^3)	=	1m^3	(G)
SUBMÚLTIPLOS	decímetro cúbico (dm^3)	=	0,001 do m^3	
	centímetro cúbico (cm^3)	=	0,000 001 do m^3	
	milímetro cúbico (mm^3)	=	0,000 000 001 do m^3	

O quadro G contém todas as unidades de volume do sistema métrico decimal, as suas abreviaturas e os seus valores em relação ao metro cúbico.

Se um m^3 tem 1 000dm^3, então 1dm^3 é a milésima parte do m^3. Consideremos o número 3,478 (3 unidades e 478 milésimos). Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos 3,478m^3, isto é, 3m^3 e 478 milésimos do m^3. Mas, os milésimos do m^3 são dm^3. Então, 3,478m^3 significa 3m^3 e 478dm^3. Consideremos o número 7,8m^3. Escrevendo dois zeros à direita da parte fracio-

nária, êste número não se altera. Portanto, $7{,}8m^3 = 7{,}800m^3 = 7m^3$ e $800dm^3$. Do mesmo modo, $4{,}57m^3 = 4{,}570m^3 = 4m^3$ e $570dm^3$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^3, escrever os volumes seguintes:

1. $3m^2$ e $7dm^3$	**5.** $647dm^3$	**9.** $7m^3$ e $6dm^3$
2. $2dm^3$	**6.** $9m^3$ e $40dm^3$	**10.** $45dm^3$
3. $48dm^3$	**7.** $2m^3$ e $34dm^3$	**11.** $7m^3$ e $8dm^3$
4. $359dm^3$	**8.** $4\,578dm^3$	**12.** $5m^3$ e $37dm^3$

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

13. $4{,}537m^3$	**15.** $0{,}089m^3$	**17.** $0{,}293m^3$	**19.** $8{,}7m^3$
14. $6{,}259m^3$	**16.** $0{,}546m^3$	**18.** $7{,}48m^3$	**20.** $3\,456dm^3$

Um $m^3 = 1\,000dm^3$; um $dm^3 = 1\,000cm^3$; logo $1m^3 = 1\,000\,000\ cm^3$. Então, **1 cm^3 é a milionésima parte do m^3.** Consideremos o número 3,578 946 (3 unidades, 578 milésimos e 946 milionésimos). Escrevendo o símbolo *m^3* à direita dêste número, teremos $3\,578\,946m^3$, isto é, $3m^3$, 578 milésimos do m^3 e 946 milionésimos do m^3. Mas, milésimos do m^3 são dm^3 e milionésimos do m^3 são cm^3. Então, $3{,}578\,946m^3$ significa $3m^3$, $578dm^3$ e $946cm^3$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^3, escrever os volumes seguintes:

1. $25cm^3$	**4.** $5m^3$ e $647cm^3$	**7.** $47\,895cm^3$
2. $248cm^3$	**5.** $31dm^3$ e $58cm^3$	**8.** $7m^3$ e $42cm^3$
3. $3\,796cm^3$	**6.** $4m^3$, $10dm^3$ e $8cm^3$	**9.** $1m^3$, $2dm^3$ e $4cm^3$

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

10. $3{,}476\,870m^3$	**12.** $0{,}073\,56m^3$	**14.** $0{,}000\,2m^3$
11. $5{,}607\,080m^3$	**13.** $0{,}124\,85m^3$	**15.** $0{,}007\,8m^3$

Um $m^3 = 1\,000\,000\,000$ de mm^3. Então **1 mm^3 é a bilionésima parte do m^3.** Consideremos o número 7,345 678 219. (7 unidades, 345 milésimos, 678 milionésimos e 219 bilionésimos). Escrevendo o símbolo *m^3* à direita dêste número, teremos $7{,}345\,678\,219m^3$, isto é, $7m^3$, 345 milésimos do m^3, 678 milionésimos do m^3 e 219 bilionésimos do m^3. Mas, milésimos do m^3 são dm^3, milionésimos do m^3 são cm^3 e bilionésimos do m^3 são mm^3. Então $7{,}345\,678\,219m^3$ significa $7m^3$, $345dm^3$, $678cm^3$ e $219mm^3$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^3, escrever os volumes seguintes:

1. $1mm^3$
2. $14mm^3$
3. $387mm^3$
4. $5\,789mm^3$
5. $43\,518mm^3$
6. $74cm^3$ e $36mm^3$
7. $8m^3$ e $542mm^3$
8. $43dm^3$ e $37mm^3$
9. $1dm^3$, $2cm^3$ e $5mm^3$

10. Ler de todos os modos possíveis, o número .... $7,\,528\,437\,619m^3$

Consideremos o número 4,123 456 789. Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos $4{,}123\,456\,789m^3$. E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$4{,}123\,456\,789m^3 = 4m^3 + 123dm^3 + 456cm^3 + 789mm^3$$
$$3{,}246\,813\,57m^3 = 3m^3 + 246dm^3 + 813cm^3 + 570mm^3$$
$$2{,}410\,529\,6m^3 = 2m^3 + 410dm^3 + 529cm^3 + 600mm^3$$
$$5{,}643\,728m^3 = 5m^3 + 643dm^3 + 728cm^3$$
$$6{,}238\,57m^3 = 6m^3 + 238dm^3 + 570cm^3$$
$$7{,}963\,2m^3 = 7m^3 + 963dm^3 + 200cm^3$$
$$2{,}528m^3 = 2m^3 + 528dm^3$$
$$3{,}47m^3 = 3m^3 + 470dm^3$$
$$6{,}8m^3 = 6m^3 + 800dm^3$$

20. Mudança de unidade nas medidas de volume. A unidade de volume pode ser qualquer; o m^3, o dam^3, o dm^3, etc.. Escolhe-se a unidade de acôrdo com o corpo cujo volume se quer medir.

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro H.

unidades	milésimos	milionésimos	bilionésimos
3,	5 2 7	4 8 9	6 3 2
m^3	dm^3	cm^3	mm^3

(H)

Nos números que representam volumes, a unidade escolhida é representada pela abreviatura correspondente.

Consideremos $3{,}457\,8m^3$. Escrevendo dois zeros à direita, e de acôrdo com o quadro H, êste número contém $3m^3$, $457dm^3$ e $800cm^3$. E, de acôrdo com os princípios da numeração, $3{,}457\,8m^3 = 3\,457{,}800dm^3 = 3\,457\,800cm^3 = 3\,457\,800\,000mm^3$.

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. $4m^3$ (dm^3)
2. $7m^3$ (cm^3)
3. $9m^3$ (mm^3)
4. $4dm^3$ (mm^3)
5. $6dm^3$ (cm^3)
6. $9cm^3$ (mm^3)
7. $0{,}8m^3$ (dm^3)
8. $0{,}47m^3$ (dm^3)
9. $0{,}428m^3$ (dm^3)
10. $0{,}6m^3$ (cm^3)
11. $0{,}45m^3$ (cm^3)
12. $0{,}376m^3$ (cm^3)
13. $0{,}4dm^3$ (cm^3)
14. $7{,}6dm^3$ (cm^3)
15. $12{,}3dm^3$ (cm^3)
16. $0{,}48dm^3$ (cm^3
17. $0{,}259dm^3$ (cm^3)
18. $0{,}63dm^3$ (cm^3)
19. $2{,}8m^3$ (cm^3)
20. $4{,}26m^3$ (cm^3)
21. $0{,}4m^3$ (mm^3)
22. $0{,}52m^3$ (mm^3)
23. $0{,}8dm^3$ (cm^3)
24. $0{,}56dm^3$ (mm^3)
25. $0{,}87cm^3$ (mm^3)
26. $3m^3$ (mm^3)
27. $0{,}8dm^3$ (mm^3)
28. $9cm^3$ (mm^3)
29. $7{,}6m^3$ (dm^3)
30. $6{,}9dm^3$ (cm^3)
31. $0{,}498\,357m^3$ (dm^3)
32. $427\,859\,628mm^3$ (dm^3)
33. $345\,678\,916cm^3$ (m^3)
34. $12\,830\,720cm^3$ (dm^3)

21. Os múltiplos do metro cúbico. Muito raramente são empregados na vida prática, porque o metro cúbico é uma unidade suficiente para medir os grandes volumes.

O dam^3 é um cubo cujas faces são decâmetros quadrados; logo, as arestas têm um decâmetro de comprimento. A figura 3 do parágrafo 14 mostra com facilidade que $1dam^3 = 1\,000m^3$. E' bastante supor que a aresta AB tenha um decâmetro de comprimento. Portanto, $1dam^3$ contém um milhar de metros cúbicos. Então, considerando o número $4\,358m^3$, o algarismo 4 representa dam^3, e $4\,358m^3 = 4dam^3$ e $358m^3$.

O hm^3 é um cubo cujas faces são hectômetros quadrados; logo, as arestas têm um hectômetro de comprimento. A mesma figura mostra com facilidade que $1hm^3 = 1\,000dam^3$. E' bastante supor que a aresta AB tenha um hectômetro de comprimento. Portanto, $1hm^3$ contém $1\,000dam^3$. E sendo $1dam^3 = 1\,000m^3$, segue-se que $1hm^3 = 1\,000\,000m^3$. Então, $7\,548\,329m^3 = 7hm^3$, $548dam^3$ e $329m^3$. E assim por diante.

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. $3dam^3$ (m^3)
2. $4{,}7dam^3$ (m^3)
3. $5{,}84dam^3$ (m^3)
4. $8{,}567dam^3$ (m^3)
5. $3dam^3$ (dm^3)
6. $7dam^3$ (dm^3)
7. $3{,}6dam^3$ (dm^3)
8. $3\,468m^3$ (dam^3)
9. $478\,546m^3$ (dam^3)
10. $3{,}48m^3$ (dm^3)
11. $7hm^3$ (m^3)
12. $8{,}47dam^3$ (m^3)
13. $9{,}56hm^3$ (dam^3)
14. $6{,}83hm^3$ (m^3)
15. $7{,}46m^3$ (dm^3)
16. $2{,}48m^3$ (dm^3)
17. $7{,}59dam^3$ (m^3)
18. $12{,}568hm^3$ (dam^3)
19. $1\,234\,567m^3$ (dam^3)
20. $45\,897dam^3$ (hm^3)

Exercícios. Série IV

Problemas sôbre medidas de volume

Não esquecer que:

$m \times m = m^2$	$m \times m \times m = m^3$	$dm \times dm \times dm = dm^3$
$m^2 \div m = m$	$m^3 \div m^2 = m$	$dm^3 \div dm^2 = dm$
$dm \times dm = dm^2$	$m^3 \div m = m^2$	$dm^3 \div dm = dm^2$
$dm^2 \div dm = dm$		

O produto de dois comprimentos é uma área. O produto de três comprimentos é um volume. O produto de uma área por um comprimento é um volume. O quociente da divisão de uma área por um comprimento é um comprimento. O quociente da divisão de um volume por uma área é um comprimento.

1. Reduzir $7{,}4m^3 + 34{,}58dm^3 + 7{,}826dam^3 + 345\,678dm^3 + 0{,}819m^3 + 407\,586\,000mm^3$ a dm^3.

Solução.	$7{,}4m^3$	=	$7\,400{,}000dm^3$
	$34{,}58dm^3$	=	$34{,}580dm^3$
	$7{,}826dam^3$	=	$7\,826\,000{,}000dm^3$
	$345\,678dm^3$	=	$345\,678{,}000dm^3$
	$0{,}819m^3$	=	$819{,}000dm^3$
	$407\,586\,000mm^3$	=	$407{,}586dm^3$
Resposta.			$8\,180\,339{,}166dm^3$

2. Calcular o volume de uma sala que tem 9,5m de comprimento, 7,4m de largura e 4,36m de altura.

3. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 4,13m.

4. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 8,25m.

5. Quanto vale um bloco de granito de forma cúbica, cuja aresta mede 1,26m, supondo que o decímetro cúbico do granito se possa vender a Cr.$ 0,45?

6. Calcular em dm^3 o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,5m, 2,4m e 1,3m.

7. Calcular em cm^3 o volume de um tijolo cujas dimensões são 0,32m, 0,15m e 0,08m.

8. Uma tôrre com 36,4m de altura tem a forma de um bloco retangular. A base da tôrre mede 11,6m de comprimento por 8,4m. Calcular a área da base da tôrre; a área lateral; a área total; o volume.

9. Calcular o volume de uma parede com 14m de comprimento, 34dm de altura e 33cm de espessura.

10. Quantos tijolos serão necessários para construir uma parede com $15{,}8m \times 4{,}3m \times 0{,}35m$, se as dimensões do tijolo são 0,30m, 0,15m e 0,08m? Se os tijolos custam Cr.$ 84,00 por milheiro, e se o operário ganha Cr.$ 8,60 por metro quadrado da parede construída, qual será o custo desta parede?

11. Uma sala de aula mede $18{,}5m \times 13{,}4m \times 5{,}2m$. Supondo que cada aluno necessite de um espaço igual a $4{,}8m^3$ para respirar à vontade, quantos alunos pode conter esta sala?

12. Calcular a área lateral, a área total e o volume de uma viga que mede 4,5m × 0,33m × 0,06m. As bases da viga são as extremidades.

13. Quantos m^3 de pedra são necessários para fechar com uma parede de 2,4m de altura e 0,3m de espessura, um terreno retangular que mede 87m de comprimento por 57m de largura?

14. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 2,7m.

15. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 5,2m.

16. A soma dos comprimentos das arestas de um cubo é igual a 40,8m. Calcular a área de cada uma das bases e o volume do cubo.

17. A área total de um cubo é igual a 162,24m^2. Calcular o comprimento da aresta e o volume do cubo.

18. Um reservatório de forma cúbica tem uma profundidade de 2,4m. Quanto custará a pintura interior e exterior dêste reservatório, a Cr.$ 3,40 por metro quadrado? Supõe-se que o reservatório é aberto na parte superior.

19. Um reservatório mede 7,8m de comprimento, 6,4m de largura e 3,5m de profundidade. Não está cheio, faltando ainda 48cm para que a água chegue a transbordar. Quantos dm^3 de água contém êste reservatório?

20. Um bloco de granito mede 8,4m × 6,7m × 3,5m. Quebra-se êste bloco para empregá-lo na construção de uma estrada. O granito, depois de partido, aumenta de 0,24 do seu volume. As dimensões do caminhão empregado no transporte são 2m, 1,3m e 0,45m. Cada viagem do caminhão custa Cr.$ 8,00. Quanto custará o transporte de todo o granito?

21. Cavou-se um fosso com 48m de comprimento, 7,4m de largura e 3,25m de profundidade. A terra foi conduzida a um lugar distante, em um caminhão cujas dimensões são 1,9m, 1,2m e 0,44m. Sabendo-se que a terra, depois de revolvida, aumenta de 0,15 do seu volume, calcular o custo do transporte de toda a terra, custando Cr.$ 6,20 cada viagem do caminhão.

22. Suponha-se que a terra sôlta, depois de comprimida, perde 0,12 do seu volume. Quantos metros cúbicos de terra serão necessários para encher um fosso com 27 metros de comprimento, 8,4m de largura e 3,6m de profundidade?

23. O volume de um bloco retangular é de 74,850m^3. As dimensões da base são 4,8m e 5,2m. Calcular a altura do bloco com êrro inferior a 0,001m.

24. Uma viga tem 0,24m de largura e 0,06m de espessura. Sendo o volume da viga igual a 347dm^3, pede-se o comprimento da mesma com êrro inferior a 0,01m.

25. Uma tôrre cuja forma é a de um bloco retangular tem 42 metros de altura e 1 350 metros cúbicos de volume. A base da tôrre é um retângulo cujo comprimento é de 7,5m. Pede-se a largura dêste retângulo com êrro inferior a 0,01m.

26. A área lateral de um bloco retangular é de 46,50m^2. As bases do bloco são quadrados, cujos lados medem 3,1m cada um. Pede-se a altura do bloco e o seu volume.

27. Um pilar em forma de bloco retangular, com 7,4m × 0,45m × 0,45m, é construído com tijolos de 24cm × 13cm × 5cm. A argamassa necessária para ligar os tijolos ocupa um volume igual a 0,23 do volume do pilar. Calcular o custo dos tijolos empregados na construção do pilar, a Cr.$ 75,00 por milheiro.

28. Um terreno retangular mede 436m × 235m. Abrem-se neste terreno duas ruas perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura. A rua mais comprida tem 15 metros de largura e a mais curta tem 12 metros. Cobrem-se as duas ruas com uma camada de areia de 12cm de espessura. Calcular o custo da areia à razão de Cr.$ 3,70 por metro cúbico.

29. Um terreno retangular tem 3 840 metros de perímetro e seu comprimento é o triplo da largura. Cava-se um fosso ao longo do perímetro dêste terreno, com 2,4m de largura e 0,8m de profundidade, pagando-se Cr.$ 4,20 por metro cúbico da terra retirada. Calcular o custo dêste trabalho.

30. Um terreno retangular mede 53m × 31m. No centro dêste terreno abre-se um tanque com 7,5m × 6,4m × 3,8m. A terra retirada dêste tanque é espalhada sobre o mesmo terreno, de um modo uniforme. Qual será a altura desta camada?

22. Unidades de capacidade. *Unidades de capacidade* são as unidades de volume usadas no comércio, para a compra e venda dos chamados *secos e molhados*, isto é, arroz, farinha, feijão, batatas, leite, vinho, azeite, gasolina, etc..

Múltiplos...	hectolitro	(hl)	=	100 litros
	decalitro	(dal)	=	10 litros
Unidade	litro	(l)	=	1 litro
Submúltiplos	decilitro	(dl)	=	0,1 do litro
	centilitro	(cl)	=	0,01 do litro
	mililitro	(ml)	=	0,001 do litro

(J)

centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
2	3	5,	3	6	9
hl	dal	l	dl	cl	ml

(K)

A unidade legal das medidas de capacidade é o litro. Imaginemos uma caixa de latão, com a forma de um cubo, e cujo

volume interior seja de um decímetro cúbico. Se enchermos esta caixa com gasolina, a quantidade dêste líquido é o que se chama um litro. Portanto,

Um litro é um decímetro cúbico

Tudo o que dissemos em relação ao metro, se aplica sem restrições às medidas de capacidade. E' bastante substituir o quadro A pelo quadro J, o quadro B pelo quadro K, e a palavra *comprimento* pela palavra *capacidade.*

Convém observar que as unidades de capacidade são algumas unidades de volume, com denominações diferentes, e destinadas ao comércio.

De acôrdo com o Decreto Lei n.ª 4 257 de 16-6-1939, as unidades legais de volume são duas:

1.º *O metro cúbico.*

2.º *O litro.*

Devemos também observar que as unidades de volume crescem ou decrescem de 1 000 em 1 000, ao passo que as unidades de capacidade crescem ou decrescem de 10 em 10. Assim é que:

$$1\text{m}^3 = 1\,000\text{dm}^3 = 1\,000\,000\text{cm}^3 = 1\,000\,000\,000\text{mm}^3$$

$$1 \text{ litro} = 10 \text{ decilitros} = 100 \text{ centilitros} = 1\,000 \text{ mililitros}$$

Exercícios orais

Reduzir as capacidades que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 1dal (l)	**9.** 5,428l (ml)	**17.** 6,547hl (dal)	**24.** 47 586dl (hl)
2. 3,7l (dl)	**10.** 2,47hl (dl)	**18.** 23,57l (dal)	**25.** 9,52hl (dl)
3. 3,7dal (l)	**11.** 7,28l (dl)	**19.** 839cl (l)	**26.** 34 567cl (dal)
4. 4,8dal (l)	**12.** 347dl (l)	**20.** 2,8hl (l)	**27.** 64 738l (hl)
5. 5,7l (cl)	**13.** 6 423cl (l)	**21.** 315dl (l)	**28.** 7,59dal (cl)
6. 9,3hl (l)	**14.** 4,73dl (cl)	**22.** 32,8l (ml)	**29.** 44,57l (ml)
7. 7,28hl (l)	**15.** 3,49hl (dal)	**23.** 3 756dl (dal)	**30.** 34 803dl (hl)
8. 0,9dal (cl)	**16.** 35,58dal (hl)		

23. Redução de volumes a capacidades. Para substituir unidades de volume por unidades de capacidade, reduz-se o volume dado a dm^3, substitue-se a abreviatura do decímetro cúbico pela abreviatura do litro, e reduz-se o resultado à uni-

dade de capacidade pedida no problema. Por exemplo, se quisermos reduzir $7,8m^3$ a hectolitros, teremos:

$$78,m^3 = 7\,800dm^3 = 7\,800l = 78hl$$

Exercícios orais

Reduzir as capacidades que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. $1m^3$ (l)
2. $3,4m^3$ (dal)
3. $4,8m^3$ (hl)
4. $0,348m^3$ (dl)
5. $0,0796m^3$ (l)
6. $0,597dm^3$ (ml)
7. $9,778dm^3$ (dal)
8. $2,936m^3$ (hl)
9. $6,87dm^3$ (cl)
10. $2,47m^3$ (dal)
11. $84,9dm^3$ (dl)
12. $347dm^3$ (l)
13. $14,85dm^3$ (cl)
14. $23,74dm^3$ (dal)
15. $438,972dm^3$ (hl)
16. $6,41m^3$ (hl)
17. $7,042m^3$ (hl)
18. $0,993m^3$ (dal)
19. $0,078m^3$ (l)
20. $0,2538m^3$ (dl)

Para substituir unidades de capacidade por unidades de volume, reduz-se a capacidade dada a litros, substitue-se a abreviatura do litro pela abreviatura do decímetro cúbico, e reduz-se o resultado à unidade de volume pedida pelo problema. Por exemplo, reduzindo 357,428Hl a metros cúbicos, teremos:

$$357,428hl = 35\,742,8l = 35\,742,8dm^3 = 35,742\,800m^3$$

Exercícios orais

Reduzir as capacidades que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 47,8l (dm^3)
2. 8,39l (cm^3)
3. 472,7l (dm^3)
4. 93,48l (cm^3)
5. 7,8dl (cm^3)
6. 4,29dl (mm^3)
7. 6,43dl (cm^3)
8. 9,48cl (cm^3)
9. 12,78cl (mm^3)
10. 34 786cl (dm^3)
11. 7,8dal (dm^3)
12. 34,9dal (cm^3)
13. 328,6dal (dm^3)
14. 8,47hl (dm^3)
15. 93hl (m^3)
16. 81,7hl (m^3)
17. 7,28hl (m^3)
18. 23,9hl (m^3)
19. 16,74dal (dm^3)
20. 93,48hl (cm^3)

Exercícios. Série V

Problemas sôbre medidas de capacidade

1. Reduzir a litros 7,8dal + 457dl + 9,386hl + 234,47l + 52 384cl + + 478 520ml.

Solução.

7,8dal	=	78,00l
457dl	=	45,7l
9,386hl	=	938,60l
234,47l	=	234,47l
52 384cl	=	523,84l
478 520ml	=	478,52l
Resposta.		2 299,13l

2. Quantos litros de água contém um reservatório com 4,8m × 2,7m × 0,65m?

3. Quantos dl de água contém uma caixa com 1,7m × 0,84m × 0,23m?

4. Um reservatório mede 3,7m × 2,4m × 3,6dm. Está cheio de gasolina cujo preço é de Cr.$ 0,95 o litro. Calcular o valor de toda a gasolina.

5. Um reservatório mede 1,6m × 1,2m × 67cm. Para enchê-lo de água há uma torneira que despeja 34 litros por minuto. Em quanto tempo esta torneira enche o tanque?

6. Um reservatório tem a capacidade de 8 400 litros. Seu comprimento é de 4,7m e sua largura é de 2,3m. Calcular a sua profundidade com êrro inferior a 0,001m.

7. Um tanque tem 12,8m de comprimento e 8,4m de largura. Qual deve ser a sua profundidade para que possa conter 1 200hl de água?

8. Para encher um tanque de 5,6m × 4,3m × 1,7m são necessárias 22 horas. Quantos litros de água êste tanque recebe por minuto?

9. Um tanque mede 7,4m × 5,3m × 1,7m. Êste tanque pode conter 1 000hl de água? E' necessário aumentar a profundidade? De quanto?

10. Em uma vasilha cuja capacidade é de 1dal, despejaram-se 3,586dm^3 de água. Quantos cl de água é preciso despejar ainda na mesma vasilha, para enchê-la completamente?

11. Comprei um barril de vinho de 480 litros por Cr.$ 2 340,00. Engarrafei metade dêste vinho em garrafas de 1,5l e a outra metade em garrafas de 0,75l. Por quanto devo vender cada uma destas garrafas, para ganhar Cr.$ 720,00?

12. Um litro de trigo em grão pesa 750 gramas. O trigo, depois de moído, dá 88 % de seu pêso em farinha e o resto em farelo. Quantos quilogramas de farinha se obtém com a moagem de 4,8m^3 de trigo?

13. Quantos dal de água pode conter um tanque que mede 7,8dam × × 24,7m × 64cm?

14. Se um litro de arroz custa Cr.$ 1,30, quanto vale o arroz contido em uma caixa de 2,7m × 15dm × 82cm?

15. Um reservatório tem 2,8m de largura e 1,4m de profundidade. Sua capacidade é de 250hl. Calcular o seu comprimento, com êrro inferior a 0,01.

16. Um negociante comprou 39 litros de licor a Cr.$ 25,00 o litro. Vendeu-o em cálices cuja capacidade é de 5,1cl, e à razão de Cr.$ 1,80 cada um. Qual foi o seu lucro?

17. Um negociante comprou arroz a Cr.$ 0,85 cada litro. Com êste arroz encheu um depósito de 3,6m × 2,4m × 1,6m. Qual foi o seu lucro, vendendo o arroz a Cr.$ 1,20 cada litro, e supondo que 23 % de todo o arroz, o que estava no fundo do depósito, perdeu-se devido à humidade?

18. A Cr.$ 0,90 o litro, quanto vale a gasolina contida em um reservatório de 2,6m × 1,7m × 93cm?

19. A Cr.$ 3,70 o litro, quanto vale o vinho contido em um depósito de 3,1m × 16dm × 88cm?

20. Qual é a profundidade de um tanque com 3,7dam de comprimento por 23,6m de largura, se a sua capacidade é de 2 000 000 de litros?

24. Unidades de pêso. *O pêso de um corpo é a fôrça que atrai êste corpo para o centro da Terra;* depende do corpo e de sua situação na superfície da Terra; aumenta quando caminhamos com êste corpo, do equador para os polos; diminue quando caminhamos em sentido inverso; aumenta quando o corpo se

aproxima do centro da Terra; diminue quando êle se eleva na atmosfera. Estas variações de pêso, aliás muito fracas, podem ser verificadas com uma mola bastante sensível.

A massa de um corpo é a quantidade de matéria de que é feito. A massa de um corpo é absolutamente invariável, seja qual for a posição dêste corpo. Na verdade, são as *massas* que se comparam ou se medem com as balanças.

Na linguagem usual, com a qual nos conformaremos aquí, dizemos **pêso** em lugar de **massa**, e esta confusão não acarreta dificuldades de espécie alguma, na vida prática. Sob o ponto de vista científico, porém, conviria, no que se segue, substituir a palavra *pêso* pela palavra *massa*. (*)

Observação. A distinção entre *massa* e *pêso* é algum tanto sutil para os estudantes aos quais se destina êste compêndio. Trata-se de um assunto que deve ser ventilado nos cursos de Física onde, então, a palavra *pêso* será substituída definitivamente pela palavra *massa*. Nada nos impede, porém, de fazermos desde já esta substituição.

A unidade legal de pêso é o **quilograma** Entretanto, para estabelecer a escala dos múltiplos e submúltiplos das unidades de pêso, *toma-se como unidade principal o* **grama**.

MÚLTIPLOS...	quilograma	(kg)	=	1 000 gramas
	hectograma	(hg)	=	100 gramas
	decagrama	(dag)	=	10 gramas
UNIDADE.....	grama	(g)	=	1 grama
SUBMÚLTIPLOS	decigrama	(dg)	=	0,1 do grama
	centigrama	(cg)	=	0,01 do grama
	miligrama	(mg)	=	0,001 do grama

(L)

u. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
3	7	5	8,	9	4	6
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

(M)

(*) *Lições de Aritmética*, de Julio Tannery, 9.ª edição revista, página 365.

A unidade principal das medidas de pêso é o **grama.** Imaginemos uma caixinha de forma cúbica e cujo volume interior seja de um **centímetro cúbico.** Se enchermos esta caixinha com **água distilada,** e à temperatura de **quatro graus centígrados,** teremos dentro da caixinha uma quantidade de água, cujo **pêso é um grama.** Portanto, supondo a água quìmicamente pura, e à temperatura de quatro graus centígrados,

1*cm*^{3} *de água pesa*	1 *grama*	
1*dm*^{3} *de água pesa*	1 000 *gramas*	(1kg)
1*m*^{3} *de água pesa*	1 000 000 *gramas*	(1 000kg)

Tudo o que dissemos em relação ao metro se aplica, sem restrições, às medidas de pêso. E' bastante substituir o quadro A pelo quadro L, o quadro B pelo quadro M, e a palavra *comprimento* pela palavra *pêso.*

No comércio, o grama é unidade de pêso pouco prática, por ser muito pequena. Toma-se como unidade o quilograma. O *quilograma* tem dois múltiplos : o quintal métrico e a tonelada métrica.

Um quintal métrico tem 100 *quilogramas.*
Uma tonelada métrica tem 1 000 *quilogramas.*

Entre os submúltiplos do grama temos também o *quilate* que pesa 0,2 do grama.

Exercícios orais

Reduzir os pesos que se seguem à unidade indicada.

1. 8g (dg)
2. 8,4g (dg)
3. 0,36g (cg)
4. 4,29g (mg)
5. 0,57g (cg)
6. 7,3g (mg)
7. 0,2g (mg)
8. 9,2g (cg)
9. 6,24g (mg)
10. 3,8g (cg)
11. 348cg (g)
12. 4 937mg (g)
13. 283,9dg (g)
14. 72,6cg (g)
15. 2 345cg (g)
16. 4,7dag (dg)
17. 378,9g (dag)
18. 23,57hg (g)
19. 3 785,6g (hg)
20. 76,8g (cg)
21. 3kg (g)
22. 8,6kg (g)
23. 3,76kg (dag)
24. 3,48kg (hg)
25. 2 796,5dag (kg)
26. 84 597g (hg)
27. 12,9dag (cg)
28. 632hg (g)
29. 8 quintais métricos a kg
30. 7 quintais métricos a kg
31. 9 toneladas métricas a kg
32. 6 toneladas métricas a kg
33. 5 quintais métricos a dag
34. 3,7 quintais métricos a kg
35. 3,42 toneladas métricas a kg
36. 3 740kg a quintais métricos
37. 4 268kg a quintais métricos
38. 3 910kg a quintais métricos
39. 37 580hg a quintais métricos
40. 345,7kg a quintais métricos
41. 389 370kg a toneladas métricas
42. 647 000kg a toneladas métricas
43. 317 000kg a quintais métricos
44. 7 261,84kg a quintais métricos
45. 389 370kg a quintais métricos

Determinar o pêso dos seguintes volumes de água:

46. $17cm^3$	**49.** $18,46dm^3$	**52.** $0,259m^3$
47. $3,8dm^3$	**50.** $3,7m^3$	**53.** $3,47cm^3$
48. $0,4dm^3$	**51.** $0,046m^3$	**54.** $4,083cm^3$

Determinar o volume dos seguintes pesos de água:

55. 7,8g	**58.** 7,26hg	**62.** 0,38dg
56. 37g	**59.** 5,37hg	**63.** 4,9cg
57. 8,9dag	**60.** 0,29dag	**64.** 6,47dg
	61. 7,236kg	

25. Os corpos e sua densidade. Um dm^3 de água ou um litro de água pura, na temperatura de quatro graus centígrados, pesa 1kg. Entretanto, um litro de leite pesa 1,030kg; um litro de azeite pesa 0,910kg; um litro de ácido sulfúrico pesa 1,840kg; um litro de mercúrio pesa 13,600kg; um dm^3 de platina pesa 22,060kg; um dm^3 de ouro pesa 19,260kg; etc.. Portanto, volumes iguais de dois corpos diferentes não têm o mesmo pêso; 4 litros de leite pesam mais do que 4 litros de azeite; $7dm^3$ de ouro pesam menos do que $7dm^3$ de platina; etc.. Diz-se, então, em Física, que os corpos não têm a mesma *densidade*. *Densidade (absoluta) de um corpo é o número que exprime quantas vêzes o pêso dêste corpo contém o pêso de um igual volume de água distilada, à temperatura de 4 graus centígrados.*

Corpo	Densidade	Peso
Platina	22,06	1 dm^3 pesa 22,060kg
Ouro	19,26	1 dm^3 pesa 19,260kg
Prata	10,47	1 dm^3 pesa 10,470kg
Cobre	8,85	1 dm^3 pesa 8,850kg
Ferro	7,78	1 dm^3 pesa 7,780kg
Sal	2,21	1 dm^3 pesa 2,210kg
Cortiça	0,24	1 dm^3 pesa 0,240kg
Mercúrio	13,60	1 dm^3 ou 1 litro pesa 13,600kg
Leite	1,03	1 dm^3 ou 1 litro pesa 1,030kg
Vinho	0,993	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,993kg
Azeite	0,91	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,910kg
Benzina	0,90	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,900kg
Eter	0,73	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,730kg

Conhecendo o *volume* de um corpo e a sua *densidade*, é muito simples determinar o *pêso* dêste corpo. Por exemplo, qual é o pêso de $7dm^3$ de platina? A densidade da platina é 22,06. Portanto, se $1dm^3$ de água pesa 1kg, $1dm^3$ de platina pesará 22,06kg; logo, $7dm^3$ pesarão 22,06kg $\times$ 7; isto é, 154,42kg.

Podemos pois estabelecer que:

volume (*em* dm^3) $\times$ **densidade** = **pêso** (*em kg*)
volume (*em* cm^3) $\times$ **densidade** = **pêso** (*em gramas*)

Conhecendo o *pêso* de um corpo e a sua *densidade*, é muito simples determinar o *volume* dêste corpo. Por exemplo, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? A densidade da cortiça é 0,24. Portanto, $1dm^3$ de cortiça pesa 0,240kg. Se $1dm^3$ de cortiça pesa 0,240kg, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? E' bastante dividir 3,600kg por 0,240kg. Resulta $15dm^3$ que é o volume pedido.

Podemos pois estabelecer que:

$$\frac{\textbf{pêso}\ (\textit{em kg})}{\textbf{densidade}} = \textbf{volume}\ (\textit{em}\ dm^3)$$

$$\frac{\textbf{pêso}\ (\textit{em gramas})}{\textbf{densidade}} = \textbf{volume}\ (\textit{em}\ cm^3)$$

Exercícios. Série VI

1. Calcular o pêso de $37dm^3$ de platina.
2. Calcular o pêso de 47,8dal de vinho.
3. Calcular o pêso de 7,29hl de azeite.
4. Calcular o pêso de $15,48dm^3$ de ouro.
5. Calcular o pêso de 8,24l de éter.
6. Calcular o pêso de 300kg de prata.
7. Calcular o volume de 250kg de cortiça.
8. Calcular o pêso de 3,28hl de leite.
9. Calcular o pêso de $8m^3$ de benzina.
10. Calcular o pêso de $24,87m^3$ de sal.
11. Um bloco de pedra com $36dm^3$ pesa 120kg. Qual é a densidade desta pedra?
12. Uma viga de madeira com $18,47dm^3$ pesa 11,45kg. Qual é a densidade desta madeira?

Exercícios. Série VII

Problemas sôbre medidas de peso

1. Um tanque mede 4,8m $\times$ 2,7m $\times$ 1,5m. Calcular em quintais métricos o pêso da água que êle pode conter.

2. Calcular em kg o pêso de um cubo de pedra cuja aresta mede 0,84m, sendo a densidade da pedra igual a 7,5.

3. Qual é o pêso de uma viga de peroba de 2,3m × 18cm × 0,07m, sendo a densidade da peroba igual a 1,4?

4. Um cubo de cortiça tem uma aresta de 1,4m. Sendo a densidade da cortiça igual a 0,24 calcular o valor dêste cubo a Cr.$ 0,30 o quilograma.

5. Custando o azeite Cr.$ 4,50 o quilograma, quanto vale o azeite contido em uma lata de 66cm × 34cm × 34cm? A densidade do azeite é 0,91.

6. Quanto vale um bloco retangular de ouro, de 14cm × 8cm × 5cm a Cr.$ 3,50 a grama? A densidade do ouro é 19,26.

7. Um hl de carvão pesa 83,500kg. Custando cada hl, Cr.$ 7,20, quanto custarão 23 toneladas métricas?

8. Calcular em quintais métricos o pêso da água contida em um reservatório de 8,3m × 64dm × 32dm, faltando ainda 0,74m para que o reservatório fique completamente cheio.

9. Calcular o valor de 45 latas de benzina, cada uma das quais mede 0,48m × 0,35m × 0,35m, custando a benzina Cr.$ 1,10 o kg. A densidade da benzina é 0,90.

10. Um litro de ar pesa 1,293g. Calcular o pêso do ar contido em um salão de 24m × 18m × 7,4m.

11. Um milharal mede 485m × 348m. Calcular o valor de uma colheita, sabendo que cada hectare produz 45hl de milho, o qual é vendido em sacas de 60kg a Cr.$ 42,00 cada uma. Cada saca contém 90 litros.

12. Um reservatório de gasolina mede 8,5m × 6,4m × 2,9m. Vende-se esta gasolina em latas de 0,52m × 0,27m × 0,27m, a Cr.$ 48,00 a lata. Qual é o valor de toda a gasolina?

13. Um quintal métrico de trigo produz 83kg de farinha. Um kg de farinha produz 1,350kg de pão. Calcular a quantidade de pão que se pode fazer com 250hl de trigo, supondo que um hl pese 72kg.

14. Tenho duas pipas com o mesmo pêso e a mesma capacidade. Encho uma delas com azeite e a outra com água. E verifico que a pipa cheia de água pesa 27kg mais do que a pipa cheia de azeite. Qual é a capacidade de cada uma das pipas? A densidade do azeite é 0,91.

15. A densidade do leite é 1,03. Um sitiante tem 25 vacas, cada uma das quais dá, em média, por dia, 9 litros de leite. O leite produz 1/10 de seu pêso em creme, e o creme produz 4/7 do seu pêso em manteiga. Qual é em kg a quantidade de manteiga que o sitiante pode fabricar em um mês de 30 dias?

16. O café fino perde na torração 17 % de seu pêso. Comprei 450kg de café a Cr.$ 2,40; torrei-o, e depois vendí o quilo de pó a Cr.$ 3,70. Quanto ganhei?

17. O fundo de um tanque mede 3,8m × 2,7m. Despejam-se neste tanque 5 400l de água. Qual será a altura da água dentro do tanque?

18. O fundo de um tanque mede 4m × 3m. Despejam-se neste tanque 11 toneladas métricas de azeite. Qual será a altura do azeite dentro do tanque? A densidade do azeite é 0,91.

19. Põe-se um pedaço de ferro dentro de uma lata com água. A lata tem uma base de 0,36m por 0,36m e observa-se que o pedaço de ferro pôsto

dentro da lata, faz com que o nível da água suba cerca de 0,05m. **Qual é o** pêso do pedaço de ferro? A densidade do ferro é 7,78.

20. Um litro de água do mar pesa 1,025kg. Uma tonelada de água do mar contém 35kg de sal grosso. O sal grosso, depois de purificado, perde 20 % de seu pêso. Quantos metros cúbicos de água do mar são necessários para obter 400kg de sal fino?

21. Uma pipa de vinho pesa 355kg. A mesma pipa cheia de água pesa 372kg. Calcular a capacidade da pipa, sendo a densidade do vinho igual a 0,95.

22. Um reservatório com a forma de um bloco retangular tem uma superfície (face superior) de 65m². Está cheio de azeite avaliado em Cr.$ 408 135,00. Um hectolitro de azeite pesa 91kg e custa Cr.$ 300,00. Pede-se a profundidade do reservatório.

26. O movimento uniforme. Suponhamos que um trem caminha percorrendo invariàvelmente 1km por minuto ou 60km por hora. Diremos que *êste trem está animado de um* **movimento uniforme.** Se um automóvel se deslocar percorrendo invariàvelmente 30km por hora ou 500m por minuto, diremos ainda que *êste automóvel está animado de um* **movimento uniforme.**

Em Matemática, dá-se o nome de **móvel** a qualquer corpo em movimento; um trem que se desloca de um ponto para outro é um *móvel*; um automóvel, um carro, um ciclista, uma senhorinha que passeia na Avenida, um professor que caminha por entre as carteiras escolares, tudo é *móvel.*

Um móvel está animado de um movimento uniforme, quando êle percorre espaços iguais em tempos iguais.

Ou, ainda,

O movimento de um móvel é uniforme quando êste móvel percorre espaços iguais em tempos iguais.

Espaço *é o caminho percorrido por um móvel qualquer.* Seria preferível dizer *trajetória* em lugar de *espaço*, porque o espaço é o meio onde estão situados todos os corpos. Mas o uso consagrou a palavra *espaço* para designar o caminho percorrido por um móvel. A unidade de espaço é uma unidade qualquer de comprimento.

Se um ciclista percorre 40km em 80 minutos, com movimento uniforme, diremos que a sua *velocidade* é de 500 *metros por minuto*, porque 40km ÷ 80min = 40 000m ÷ 80min = 500m. Se um automóvel percorre 220km em 5 horas e meia, diremos que a *velocidade* dêste automóvel é de 40km por hora, porque

220km ÷ 5,5 horas = 40km. De um modo geral podemos dizer que:

A **velocidade** *de um movel é o espaço por êle percorrido durante a unidade de tempo.*

Exercícios em classe

Resolver, no quadro-negro, os seguintes problemas:

1. Um menino caminha com a velocidade de 54,6m por minuto. Qual é o *espaço* por êle percorrido em 1 hora e 24 minutos?

2. Um autómovel percorreu 236km em 6 horas e ¾. Qual é a *velocidade* dêste autómovel?

3. Qual é o *tempo* necessário a um ciclista para percorrer 48km, com a velocidade de 30km por hora?

4. Um trem caminha com a velocidade de 42,5km por hora. Qual é o *espaço* por êle percorrido em 7 horas e 40 minutos?

5. Um navio percorreu 342km em 9 horas e 25 minutos. Qual foi a *velocidade* por êle desenvolvida?

6. Em quanto tempo um automóvel, correndo com a velocidade de 40km por hora, percorre uma estrada de 615km?

Dos problemas que acabámos de resolver, podemos concluir que:

$$\textbf{espaço} = \textbf{velocidade} \times \textbf{tempo}$$

$$\textbf{velocidade} = \frac{\textbf{espaço}}{\textbf{tempo}} \qquad \textbf{tempo} = \frac{\textbf{espaço}}{\textbf{velocidade}}$$

São estas as três **fórmulas** que ligam o *espaço*, a *velocidade* e o *tempo*, quando o movimento é uniforme.

A velocidade é o *quociente completo* de dois números: espaço e tempo.

O tempo é o *quociente completo* de dois números: espaço e velocidade.

A unidade legal de velocidade é o **metro por segundo.** E' a velocidade de um móvel que, animado de um movimento retilíneo e uniforme, percorre uma distância de um metro durante um segundo. (Decreto-Lei n.º 4 257 de 6-6-1 939) Seu símbolo é $\frac{m}{s}$.

Outras unidades de velocidade podem ser adotadas como, por exemplo, o metro por minuto $\left(\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)$, o centímetro por segundo $\left(\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)$, o quilômetro por hora $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ etc..

No mar, a unidade adotada é o nó, eqüivalente a uma milha náutica por hora. Uma milha náutica tem 120 nós.

Uma milha náutica = 1851,85m
Um nó = 15,432m

Quando dizemos que um navio desenvolve 24 nós, queremos dizer que êste navio percorre 24 *nós em meio minuto*, ou 24 milhas náuticas por hora.

Para termos a velocidade dêste navio em *metros por segundo*, é bastante dividir 15,432 por 30 ; acharemos 0,514m por segundo.

A conversão das unidades de velocidade é um problema muito simples.

Exercícios. Série VIII

O movimento uniforme

1. Dois automóveis partem às 6 horas da manhã, de duas cidades cuja distância é de 320km, e caminham um para o outro. A velocidade do primeiro é de 35km por hora e a do segundo é de 25km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Ao cabo de uma hora, a distância que separa os dois automóveis diminue de 35km + 25km.

2. Das extremidades de uma avenida que mede 1 496m partem, ao mesmo tempo, dois meninos que desejam encontrar-se. O primeiro caminha 48m por minuto, e o segundo apenas 20. A que distância das extremidades da avenida se encontrarão? Se êles partirem às 7 horas e 12 minutos, a que horas se encontrarão?

3. À margem de um rio estão situadas duas cidades A e B, cuja distância ao longo dêste mesmo rio é de 136km. Às 8 horas da manhã partem dessas cidades dois barcos, um tripulado por 6 moços, e o outro por 5. O barco que parte da cidade A, tem uma velocidade de 15km por hora, e o que parte da cidade B tem uma velocidade de 19km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

4. A distância entre duas cidades é de 600km. Às 6 horas da manhã parte da cidade A um automóvel com a velocidade de 48km por hora e às 7 horas e meia da manhã parte da cidade B um automóvel com a velocidade de 40km por hora. Um se dirige ao encontro do outro. A que horas se encontrarão, e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Às 7 horas da manhã, o automovel A já percorreu 48km. Portanto, a essa hora, a distância que separa os dois automóveis é 600km – 48km.

5. Resolver o segundo problema, supondo que o primeiro menino partiu às 7 horas e 20 minutos, e o segundo às 7 horas e 30 minutos.

6. Resolver o terceiro problema, supondo que o barco A partiu às 8 horas da manhã, e o barco B às 9 horas.

7. Às 6 horas da manhã partiu de São Paulo, com destino ao Rio de Janeiro, um autómovel A, com a velocidade de 40km por hora. Às 9 horas da manhã partiu de São Paulo, também com destino ao Rio de Janeiro, um segundo automóvel B, cuja velocidade é de 65km por hora. Pergunta-se a que horas o segundo automóvel alcançará o primeiro, e a que distância de São Paulo.

Sugestão. Quando o automóvel B partiu, o automóvel A estava a 3×40km de distância da cidade de S. Paulo. Portanto, às 9 horas da manhã, a distância que separava os dois carros era de 120km. E, a partir dessa hora, a mesma distância começou a diminuir de 65km − 40km por hora.

8. Um ciclista, cuja velocidade é de 13,5km por hora, partiu do Rio de Janeiro, às 9 horas e meia da manhã. Ao meio-dia, um segundo ciclista saiu em perseguição do primeiro, com a velocidade de 18km por hora. A que horas, o segundo ciclista alcançou o primeiro?

9. Um ciclista partiu de S. Paulo, às 8 horas da manhã, com uma velocidade de 20km por hora. Ao meio-dia, um automóvel partiu da mesma cidade, em perseguição do ciclista, com a velocidade de 45km por hora. A que horas o ciclista foi alcançado e a que distância de S. Paulo?

10. Um ciclista fez um certo trajeto com a velocidade de 900 metros cada três minutos; entretanto, se êle pudesse correr com a velocidade de 12km, em cada meia hora, teria chegado ao fim da viagem 35 minutos mais cedo. Qual foi o caminho percorrido pelo ciclista?

27. Unidades para medir ângulos. As unidades legais para medir os ângulos planos são três: o *ângulo reto*, o *grau* e o *radiano*.

O ângulo reto já foi definido. (E.M.P.V. §§20 e 21)

O ângulo reto não tem múltiplos. Seus submúltiplos se obtém dividindo a unidade em dez, cem, mil, etc., partes iguais; portanto, êstes submúltiplos são os décimos, os centésimos, os milésimos, etc., da unidade.

Existe apenas um submúltiplo do ângulo reto que tem nome especial; é o **grado**. *O grado é a centésima parte do ângulo reto.* E' representado pelo símbolo *gr*. Assim, 36gr significa 36 grados.

Os submúltiplos do grado são o *decigrado* (dgr), o *centigrado* (cgr) e o *miligrado* (mgr). (Decreto-Lei n.º 4 257 de 6-6-1 939. Portanto, desaparecem os nomes minutos centesimais e segundos centesimais.)

Do exposto resulta que, se um ângulo mede 3,76543 retos, êste mesmo ângulo mede

3 retos, 76 grados, 5 decigrados, 4 centigrados e 3 miligrados.

Portanto, converter grados em retos, e viceversa, é um problema que não oferece dificuldade. Exemplos:

3 retos = 300 grados	0,533 retos = 53,3 grados
47,8 grados = 0,478 retos	2,1496 retos = 214,96 grados
0,562 grados = 0,00562 retos	7,33dgr = 733 mgr

Já conhecemos também o grau. (E.M.P.V. § 22) E' um nonagésimo do ângulo reto. Seus submúltiplos são o minuto e o segundo. Um ângulo medido em graus, minutos e segundos constitue um número complexo. (E.M.P.V.cap.VII)

Um ângulo também pode ser medido em graus e frações decimais do grau. Mas, para êstes submúltiplos decimais, não há nomes particulares.

Exercício. *Um ângulo mede* 37°25′48″. *Converter esta medida em graus e fração decimal do grau.*

E' bastante converter 25′ e 48″ em fração decimal do grau. Em primeiro lugar convertemos 25′ e 48″ em fração ordinária do grau.

$$25'48'' = \frac{25}{60} + \frac{48}{3\,600} = \frac{5}{12} + \frac{1}{75} = \frac{129}{300} \text{ do grau.}$$

Depois convertemos $\frac{129}{300}$ em fração decimal.

$$\frac{129}{300} \text{ do grau} = \frac{43}{100} \text{ do grau} = 0{,}43 \text{ do grau.}$$

Logo, 37°25′48″ = 37,43 graus.

Observação. Sôbre o radiano, nada podemos dizer por enquanto.

Exercícios. Série IX

Problemas sôbre graus e grados

Um ângulo reto tem 90 graus ou 100 grados ; podemos, pois, estabelecer as igualdades seguintes :

90 graus = 100 grados	100 **grados** = 90 **graus**
1 **grau** $= \frac{100}{90}$ **do grado**	1 **grado** $= \frac{90}{100}$ **do grau**
1 ***grau*** $= \frac{10}{9}$ ***do grado***	1 ***grado*** $= \frac{9}{10}$ ***do grau***

Destas igualdades se deduz a seguinte

Regra. *Para converter graus em grados, multiplica-se o número de graus por* $\frac{10}{9}$; *para converter grados em graus, multiplica-se o número de grados por* $\frac{9}{10}$.

Observação. *Se o ângulo é dado em graus, minutos e segundos, convém convertê-lo em fração decimal do grau.*

1. Converter 37° em grados.

Solução. $37 \times \frac{10}{9} = \frac{370}{9} = 41{,}1111$

Resposta. 37° = 41,1111 grados.

2. Converter 54°24′ em grados.

Solução. $54° + 24' =$

$$54° + \frac{24}{60} =$$

$$54° + \frac{4}{10} = 54°{,}4$$

$$54{,}4 \times \frac{10}{9} = \frac{544}{9} = 60{,}4444$$

Resposta. 60,4444 grados.

3. Converter 72°24′36″ em grados.

Solução. $72°24'36'' =$

$$72° + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600} =$$

$$72° + \frac{2}{5} + \frac{1}{100} =$$

$$72° + \frac{41}{100} = 72°,41$$

$$72{,}41 \times \frac{10}{9} = \frac{724{,}1}{9}$$

$$= 80{,}4555$$

Resposta. 80,4555 grados

4. Converter 52,374 grados em graus.

Solução. $52{,}374 \times \frac{9}{10} = 47°,1366$

$$\frac{1366}{10\,000} \text{ de um grau} = \frac{1\,366}{10\,000} \text{ de 60 minutos} = 8'\frac{196}{1\,000}$$

$$\frac{196}{1\,000} \text{ de um minuto} = \frac{196}{1\,000} \text{ de 60 segundos} = 11''\,\frac{176}{1\,000}$$

Resposta. 52,374 grados = 47°8′11″,176

5. Converter 44°,36 em grados.
6. Converter 62° 25′,8 em grados.
7. Converter 75° 22′ 45″ em grados.
8. Converter 48,75 grados em graus.
9. Converter 85,364 grados em graus.
10. Converter 33,4455 grados em graus.

Observação. O comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $l = 2\pi r$, na qual l representa o comprimento da circunferência, r o raio e π o número 3,14. (E.M.P.V. § 28)

11. O raio de uma circunferência mede 12,5m. Quanto mede o arco de um grau, desta circunferência?

12. Calcular o comprimento do arco de um grado, em uma circunferência cujo raio mede 36,5m.

13. O raio de uma circunferência mede 3,6m. Calcular o comprimento de um arco da mesma, com 54° 24′.

14. Qual é o comprimento de um arco com 48,36 grados, em uma circunferência cujo raio mede 4,5m?

15. O raio de uma circunferência mede 5,2m. Calcular o comprimento de um arco da mesma, com 42,35 grados.

16. Qual é o comprimento de um arco com 33,6425 grados, em uma circunferência cujo raio mede 7,5m?

17. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente $47° 23' 28''$ e $84° 45' 57''$. Quanto mede o terceiro?

18. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente $56^g,85$ e $74^g,5543$. Quanto mede o terceiro?

19. Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede $42°,6$. Calcular o outro, em graus.

20. Calcular os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo que sua diferença é $17° 22' 44''$.

28. Unidades de tempo. A unidade legal de tempo é o *segundo*, isto é, um intervalo de tempo igual a $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio, definido de acôrdo com as convenções da Astronomia.

Os múltiplos do segundo são o minuto, a hora e o dia.

um dia = 24 *horas* = 1 440 *minutos* = 86 400 *segundos*
uma hora = 60 *minutos* = 3 600 *segundos*
um minuto = 60 *segundos*

Os símbolos das unidades legais de tempo são: *d* (dia); *h* (hora); *m* ou *min* (minuto); *s* ou *seg* (segundo).

As medidas de tempo são números complexos.

Exercícios. Série X

Problemas sôbre unidades de tempo

1. Calcular, em fração decimal do dia, a duração de um eclipse que começou às 10h 15m 38s e terminou às 11h 42m 54s.

2. Converter 3h 15m 20s em fração decimal do dia, com êrro inferior a 0,001.

3. Converter 4h 22m 36s em fração decimal da hora, com êrro inferior a 0,001.

4. Converter 3,24 dias em número complexo.

5. Converter 0,414 dias em número complexo.

6. Uma torneira despeja 11 litros de água por segundo. Quantos litros despejará em 12h 25m 46s?

7. Um ciclista percorre 15km em 24m 36s. Calcular a sua velocidade em quilômetros por hora.

8. Um automóvel percorre 42km em 54m 20s. Calcular a sua velocidade em metros por segundo.

9. Um homem dá 110 passos por minuto; cada passo mede 0,72m. Em quanto tempo percorrerá êle uma distância de 23,420km?

10. Se um ciclista percorre 5,640km em 2'25'' em quanto tempo percorrerá 48,360km?

11. A Terra faz uma volta completa sobre si mesma, em 24 horas. Calcular, em metros por segundo, a velocidade de um ponto situado no equador terrestre.

12. Um avião voa a favor do vento com uma velocidade de 346km a hora e contra o vento com uma velocidade de 284km a hora. Calcular a velocidade do avião em km por hora, e a do vento em metros por segundo.

Capítulo II

Potências e Raízes

29. Definições. *Potência de um número é um produto de fatores iguais a êste número.* (*)

Segunda potência de um número é um produto de dois fatores iguais a êste número. A segunda potência de 12 é 12×12, isto é, 144. A segunda potência de um número é também chamada **quadrado** dêste número. E a razão é simples: se o **lado** de um quadrado mede, por exemplo, 15 metros, a **área** dêste mesmo quadrado é 15×15, isto é, a **segunda potência** de 15.

Terceira potência de um número é um produto de três fatores iguais a êste número. A terceira potência de 8 é $8 \times 8 \times 8$, isto é, 512. Já sabemos que, se a **aresta** de um cubo mede, por exemplo, 5, o **volume** dêste cubo é $5 \times 5 \times 5$. Eis por que a **terceira potência** de um número é chamada também **cubo** dêste número.

Exercícios em classe

1. Calcular o quadrado de 315.

2. Representar gràficamente o quadrado de 8.

3. Representar gràficamente o quadrado de 9.

4. Desenhar um quadrado cujo lado meça 12cm. Em relação a êste quadrado, o que representa o produto 12×4? E o produto 12×12?

5. Desenhar um retângulo com 8cm de comprimento e 5cm de largura. Em relação a esta figura, o que representa a expressão $8 \times 2 + 5 \times 2$? E a expressão 8×5? E a expressão $(8 + 5) \times 2$?

6. Calcular o cubo de 22.

7. Representar gràficamente o cubo de 4.

8. Desenhar um cubo cuja aresta meça 5cm. Em relação a êste cubo, o que representa o produto $5 \times 5 \times 5$? E o produto 5×5? E o produto $5 \times 5 \times 6$?

(*) E' indispensável recordar as noções dadas anteriormente, relativas a êste assunto (E.M.P.V. §§ 86 e 87) e repetir os exercícios que acompanham estas mesmas noções.

30. Quadrado da soma de dois números. Teorema. *O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.* Por exemplo:

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$
$$(6+4)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 4 + 4^2 = 36 + 48 + 16 = 100$$
$$(7+5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2 = 49 + 70 + 25 = 144$$

Vamos demonstrar êste teorema, gràficamente. Tracemos um quadrado ABCD, cujo lado meça 8cm. Marquemos nos lados AB e AD, e a partir do vértice A, dois segmentos AE e AM com 5cm de comprimento. Em seguida, pelos pontos E e M, tracemos os segmentos EF e MN, paralelos aos lados do quadrado. Examinemos agora a nossa figura. Temos um quadrado ABCD, cujo lado mede 5 cm + 3 cm. Então a área dêste quadrado é $(5+3) \times (5+3)$, isto é, $(5+3)^2$.

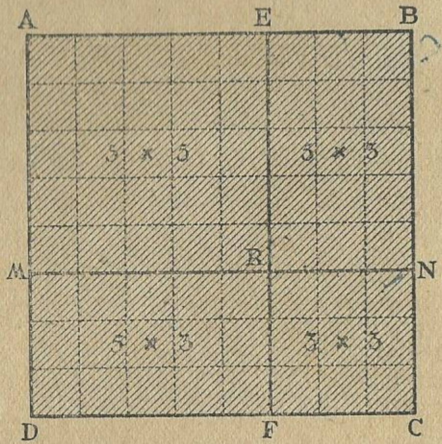


Fig. 6

E, de acôrdo com a figura, teremos:

$$(5+3)^2 = 5 \times 5 + 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 3 \quad \therefore$$
$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$$

Variando as dimensões do quadrado, assim como as dos segmentos AE e AM, chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos estabelecer, pois, de um modo geral, que:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad (*)$$

(*) A expressão $2ab$ significa $2 \times a \times b$. Operando com letras, em lugar de $a \times b$ podemos escrever ab; em lugar $a \times b \times c$, abc; em lugar $x \times 3 \times y$, $3xy$.

Exercícios em classe

1. Mostrar gràficamente que $(6+4)^2 = 6^2 + 2 \times 6 \times 4 + 4^2$.
2. Mostrar gràficamente que $(7+5)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 5 + 5^2$.
3. Mostrar gràficamente que $(8+3)^2 = 8^2 + 2 \times 8 \times 3 + 3^2$.
4. Calcular com o auxílio do teorema acima o quadrado de 23. Os estudantes devem decompor o número dado em dezenas e unidades e escrever: $23^2 = (20+3)^2$.
5. Idem, em relação ao número 35.
6. Idem, em relação ao número 43.
7. Idem, em relação ao número 57.
8. Idem, em relação ao número 64.

31. Quadrado da diferença de dois números. Teorema. *O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.* Por exemplo:

$$(8-5)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 5 + 5^2 = 64 - 80 + 25 = 9$$
$$(10-7)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 7 + 7^2 = 100 - 140 + 49 = 9$$
$$(9-5)^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 5 + 5^2 = 81 - 90 + 25 = 16$$

Vamos demonstrar êste teorema, gràficamente.

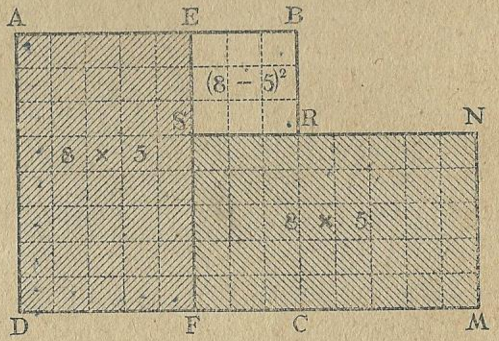


Fig. 7

Tracemos dois quadrados ABCD e CMNR, de acôrdo com a figura. Suponhamos que AB mede 8cm e CM, 5cm. Em seguida, tracemos o segmento EF paralelo à AD, e prolonguemos

NR até o ponto S. A área da figura total é $8^2 + 5^2$. A área do quadrado EBRS é $(8-5)^2$. E a figura nos diz que a área do quadrado EBRS é igual à área da figura total, menos a área dos retângulos ADFE e FMNS, cada um dos quais mede 8 centímetros de comprimento por 5 centímetros de largura. Portanto,

$$(8-5)^2 = 8^2 + 5^2 - 3 \times 8 \times 5$$
$$(8-5)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 5 + 5^2$$

Variando as dimensões da figura chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos estabelecer, pois, de um modo geral, que:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exercícios em classe

1. Mostrar gràficamente que $(10-7)^2 = 10^2 - 2 \times 10 \times 7 + 7^2$.
2. Mostrar gràficamente que $(9-5)^2 = 9^2 - 2 \times 9 \times 5 + 5^2$.
3. Mostrar gràficamente que $(12-7)^2 = 12^2 - 2 \times 12 \times 7 + 7^2$.
4. Com o auxílio do teorema dêste parágrafo, calcular 37^2. (Escrever $40-3$ em lugar de 37.)
5. Idem, em relação ao número 28.
6. Idem, em relação ao número 46.
7. Idem, em relação ao número 57.
8. Idem, em relação ao número 78.

32. Cálculo mental. I. Com o teorema do § 30 podemos verificar que *o quadrado de um número no qual o algarismo das unidades é 5, é igual ao quadrado das dezenas, mais 10 vêzes as dezenas, mais 25.* Por exemplo,

$$45^2 = (40+5)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 5 + 5^2$$
$$= 40^2 + 10 \times 40 + 5^2$$
$$= 1\,600 + 400 + 25 = 2\,025$$

Observemos que $1\,600 + 400 = 16 \times 100 + 4 \times 100$

Portanto, na prática, para elevar ao quadrado um número de dois algarismos, no qual o algarismo das unidades é 5, proce-

demos do seguinte modo: *ao quadrado do algarismo das dezenas,* **tomado em valor absoluto,** *somamos êste mesmo algarismo, e à direita do produto escrevemos* 25. Para calcular o quadrado de 65, diremos (ou pensaremos): $6 \times 6 + 6 = 42$; $65^2 = 4\,225$.

Chegaremos ao mesmo resultado, multiplicando o algarismo das dezenas pelo algarismo imediatamente superior, e escrevendo 25 à direita do produto.

Com efeito,

$$45^2 = (40 + 5)^2 = 1\,600 + 400 + 25$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 1\,600 + 400 &= 16 \times 100 + 4 \times 100 \\ &= 20 \times 100 = (4 \times 5) \times 100 \end{aligned}$$

$$\textit{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} 15^2 \ldots\ldots 1 \times 2 = 2 \ldots\ldots 15^2 = 225 \\ 35^2 \ldots\ldots 3 \times 4 = 12 \ldots\ldots 35^2 = 1\,225 \\ 55^2 \ldots\ldots 5 \times 6 = 30 \ldots\ldots 55^2 = 3\,025 \\ 85^2 \ldots\ldots 8 \times 9 = 72 \ldots\ldots 85^2 = 7\,225 \\ 105^2 \ldots 10 \times 11 = 110 \ldots 105^2 = 11\,025 \end{array} \right.$$

II. O quadrado de um número de dois algarismos, no qual o algarismo das unidades é 9, também pode ser calculado mentalmente. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 29^2 = (30 - 1)^2 &= 30^2 - 2 \times 30 \times 1 + 1^2 \qquad (\S 31) \\ &= 900 - 60 + 1 \\ &= 840 + 1 = 841 \end{aligned}$$

Dêste exemplo se conclue que, *para calcular o quadrado de* 29, *é bastante calcular o quadrado de* 30, *dêle diminuir o dôbro de* 30, *e somar uma unidade ao resultado.*

$$\textit{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} 19^2 = (20-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 360 + 1 = 361 \\ 29^2 = (30-1)^2 = 1\,900 - 60 + 1 = 840 + 1 = 841 \\ 39^2 = (40-1)^2 = 1\,600 - 80 + 1 = 1\,520 + 1 = 1\,521 \\ 49^2 = (50-1)^2 = 2\,500 - 100 + 1 = 2\,400 + 1 = 2\,401 \end{array} \right.$$

III. *O quadrado de um número cujo algarismo das unidades é 1, é igual ao quadrado das dezenas, mais o dôbro das dezenas, mais um.* Com efeito,

$$41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2$$
$$= 1\,600 + 80 + 1 = 1681$$

$$\textit{Exemplos} \begin{cases} 11^2 = 100 + 20 + 1 = 121 \\ 21^2 = 400 + 40 + 1 = 441 \\ 31^2 = 900 + 60 + 1 = 961 \\ 51^2 = 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601 \end{cases}$$

IV. Todas as potências de 1 são iguais a 1.

$$\boxed{1^2 = 1 \times 1\,;\ 1^3 = 1 \times 1 \times 1\,;\ 1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1\,;\ \text{etc..}}$$

V. Qualquer potência de 10 é igual à unidade, seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente.

$10^2 = 10 \times 10 = 100$	$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$	$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$

33. Diferença entre os quadrados de dois números inteiros consecutivos. *Dois números inteiros são consecutivos, quando sua diferença é a unidade.* Assim, os números 5 e 6, 7 e 8, 11 e 12, etc., são consecutivos.

Teorema. *A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor e mais um.*

Sejam $n + 1$ e n dois números inteiros e consecutivos. Elevando-os ao quadrado, teremos:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$n^2 = \qquad\qquad\qquad = n^2$$

E os resultados nos mostram que a diferença entre os dois quadrados é realmente o dôbro do número menor, e mais um.

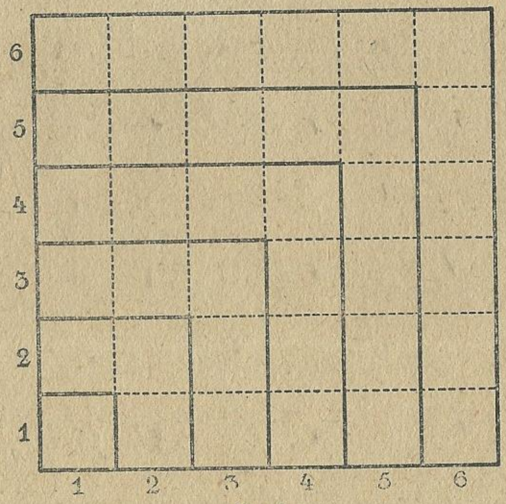


Fig. 8

O gráfico acima ilustra o teorema que acabámos de demonstrar. Com êste teorema podemos construir uma tabela de quadrados.

$10^2 = 100$	$20^2 =$ 400
$11^2 = 100 + 20 + 1 = 121$	$21^2 =$ 400 + 40 + 1 = 441
$12^2 = 121 + 22 + 1 = 144$	$22^2 =$ 484
$13^2 = 144 + 24 + 1 = 169$	$23^2 =$ 529
$14^2 = 169 + 26 + 1 = 196$	$24^2 =$
$15^2 = 196 + 28 + 1 = 225$	$25^2 =$
$16^2 = 225 + 30 + 1 = 256$	$26^2 =$
$17^2 = 256 + 32 + 1 = 289$	$27^2 =$
$18^2 = 289 + 34 + 1 = 324$	$28^2 =$
$19^2 = 324 + 36 + 1 = 361$	$29^2 =$
$20^2 = 361 + 38 + 1 = 400$	$30^2 =$

Observação. Os alunos deverão preencher o quadro acima.

Da figura 8 resulta mais uma conclusão interessante.

Se somarmos números ímpares consecutivos, a partir da unidade, a soma será sempre um quadrado.

Suponhamos que cada quadradinho da figura 8 representa uma unidade; teremos imediatamente:

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$

34. Raiz quadrada. *Raiz quadrada de um número é um outro número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro.*

A raiz quadrada de 36 é 6, porque $6 \times 6 = 36$; a raiz quadrada de 81 é 9, porque $9 \times 9 = 81$; a raiz quadrada de 900 é 30, porque $30 \times 30 = 900$; a raiz quadrada de 1 681 é 41, porque $41 \times 41 = 1\,681$.

Para indicar que a raiz quadrada de 1 681 é 41, escreveremos:

$$\sqrt{1\,681} = 41$$

Aparece, assim, em Aritmética, um sinal que ainda não conhecíamos, o sinal $\sqrt{\ }$ e que se chama **radical.** O número que se escreve debaixo do radical é chamado **radicando.** E é necessário não confundir a expressão $\sqrt{1\,681}$ com o radicando 1 681. Pedro percorreu $\sqrt{1\,681}$ quilômetros; isto significa que Pedro percorreu 41 quilômetros e não 1 681 quilômetros. Anàlogamente, $\sqrt{100}$ não é 100; é 10. O valor da expressão aritmética $\sqrt{441}$ não é 441; é 21.

Exercícios orais

1. $\sqrt{1} = ?$ 1	5. $\sqrt{9} = ?$ 3	9. $\sqrt{25} = ?$ 5	13. $\sqrt{81} = ?$ 9
2. $\sqrt{100} = ?$ 10	6. $\sqrt{4} = ?$ 2	10. $\sqrt{64} = ?$ 8	14. $\sqrt{900} = ?$ 30
3. $\sqrt{16} = ?$ 4	7. $\sqrt{121} = ?$ 11	11. $\sqrt{36} = ?$ 6	15. $\sqrt{400} = ?$ 20
4. $\sqrt{49} = ?$ 7	8. $\sqrt{144} = ?$ 12	12. $\sqrt{2500} = ?$ 50	16. $\sqrt{225} = ?$ 15

17. Um quadrado tem 81 metros quadrados de área. Quanto mede o lado?

18. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 144 centímetros quadrados?

19. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 900 milímetros quadrados?

35. Quadrados perfeitos e imperfeitos; raiz quadrada aproximada. Qual é a raiz quadrada de 30? Não é 5, porque $5 \times 5 = 25$; não é 6, porque $6 \times 6 = 36$. Então a raiz quadrada de 30 está compreendida entre 5 e 6; é 5 **mais alguma coisa** ou 6 **menos alguma coisa.** Quer num caso, quer no outro, **esta alguma coisa não chega a uma unidade;** com efeito, se 5 é pouco para $\sqrt{30}$, $5+1$ é muito; se 6 é muito para $\sqrt{30}$, $6-1$ é pouco. No primeiro caso, 5 é pouco para $\sqrt{30}$, mas o que **falta** para $\sqrt{30}$ é inferior a uma unidade; no segundo, 6 é muito para $\sqrt{30}$, mas o **excesso** de 6 sobre $\sqrt{30}$ é inferior a uma unidade. Dizemos em Aritmética, que 5 e 6 são as raízes quadradas aproximadas do número 30, e escrevemos:

$\sqrt{30} \cong 5$ (com êrro inferior a 1 unidade, por **falta**)

$\sqrt{30} \cong 6$ (com êrro inferior a 1 unidade, por **excesso**)

Quando um número inteiro tem raiz quadrada exata, toma o nome de **quadrado perfeito.** Entre os 100 primeiros números inteiros há apenas 10 números que são quadrados perfeitos, a saber: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Quando um número não tem raiz quadrada exata, chama-se **quadrado imperfeito.** E até nova ordem, devemo-nos contentar com a sua raiz quadrada aproximada.

Chama-se raiz quadrada aproximada de um número dado, e que não é quadrado perfeito, o maior número cujo quadrado é menor que o número dado, ou o menor número cujo quadrado é maior que o número dado.

Nestas condições, a raiz quadrada aproximada de 60 é 7 ou 8, porque 7 é o maior número cujo quadrado é menor que 60, e 8 é o menor número cujo quadrado é maior que 60.

Comparando os 10 primeiros números, com os seus quadrados, teremos:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

O quadro acima nos mostra que o quadrado de um número inteiro qualquer termina em 1, 4, 5, 6, 9 ou 0. Com efeito, considerando um número inteiro qualquer, e elevando-o ao quadrado, teremos :

$$374^2 = 370^2 + 2 \times 370 \times 4 + 4^2$$

No segundo membro desta igualdade temos três parcelas. As duas primeiras terminam sempre por zeros ; logo, a terceira parcela, 16, contém o algarismo 6, resultante do quadrado de 4 ; e êste algarismo, 6, é o algarismo das unidades do quadrado de 374.

Portanto, para que um número seja quadrado perfeito, é necessário que o algarismo das unidades seja 1, 4, 5, 6, 9 ou 0. *Mas, esta condição, sendo* **necessária,** *não é* **suficiente.** Por exemplo, os números 11, 14, 15, 26, 29, 30 não são quadrados perfeitos.

Observação. Em particular, se um número termina em 5, seu quadrado termina em 25. E' o que podenos verificar com os exemplos do §32, I. Portanto, para que um número terminado em 5 seja quadrado perfeito, *é necessário* que o algarismo das dezenas seja 2. Esta condição, porém, sendo *necessária,* não é suficiente. Por exemplo, 325 não é quadrado perfeito.

Exercícios em classe

1. Entre 100 e 200 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?

2. Entre 200 e 300 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?

3. Entre 300 e 400 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?

4. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 80?

5. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 120?

6. Separar 90 em duas parcelas, a primeira das quais seja o maior quadrado perfeito possível.

7. Separar 150 em duas parcelas, a primeira das quais seja o maior quadrado perfeito possível.

36. Extração da raiz quadrada. *Extrair a raiz quadrada de um número dado* significa determinar o número que, elevado ao quadrado, reproduz o número dado. Por exemplo, qual é a raiz quadrada do número 4489? Para responder a esta pergunta, é necessário **extrair a raiz quadrada do número**

4489. E o problema será proposto aos estudantes da maneira seguinte: $\sqrt{4\,489} = ?$

Para extrair a raiz quadrada de um número, há dois processos distintos, aos quais chamaremos de **processo espontâneo** e **processo usual.**

37. Processo espontâneo para extrair uma raiz quadrada. Extrair a raiz quadrada de um número dado é determinar um segundo número que, elevado ao quadrado, reproduz o primeiro. Nestas condições, para extrair a raiz quadrada de um número qualquer, por exemplo, do número 4489, é bastante elevar ao quadrado todos os números inteiros, a partir de 1, até que se descubra qual o número que, elevado ao quadrado, reproduz o número 4489. Êste processo que, à primeira vista, parece ser muito moroso, é mais ou menos rápido, se houver por parte dos estudantes certa habilidade na escolha dos números que devem elevar ao quadrado.

Vejamos então qual é o valor de $\sqrt{4\,489}$. Observemos que $10^2 = 100$, $100^2 = 10\,000$, etc.. Portanto, $\sqrt{4\,489}$ está entre 10 e 100. Tomemos um número qualquer entre 10 e 100 e cujo quadrado seja fácil de obter, por exemplo, 50. Ora $50^2 = 2\,500$. Então, $\sqrt{4\,489}$ está entre 50 e 100. Experimentemos 70; $70^2 = 4\,900$. Logo, $\sqrt{4\,489}$ está entre 50 e 70. Experimentemos 60; $60^2 = 3\,600$; $\sqrt{4\,489}$ está entre 60 e 70. Experimentemos 65; $65^2 = 3\,600 + 600 + 25 = 4\,225$. (§32) Logo, $\sqrt{4\,489}$ está entre 65 e 70. Experimentemos 67; $67^2 = 4\,489$. Então $\sqrt{4\,489} = 67$.

Êste processo, ao qual démos o nome de **processo espontâneo,** porque resulta **espontâneamente** da definição da raiz quadrada, não é aconselhável na prática, por ser muito mais demorado do que o **processo prático ou usual.** Explicando êste processo aos estudantes, quisemos apenas mostrar-lhes que *a definição clara e precisa de uma operação é meio caminho andado para compreender e efetuar esta mesma operação.*

A disposição prática do trabalho pode ser a seguinte:

$$\sqrt{4\,489} = ? \quad \left|\begin{array}{rcll} 10^2 & = & 100 & \\ 100^2 & = & 10\,000 & \therefore\ 10 < \sqrt{4\,489} < 100 \\ 50^2 & = & 2\,500 & \therefore\ 50 < \sqrt{4\,489} < 100 \\ 70^2 & = & 4\,900 & \therefore\ 50 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 60^2 & = & 3\,600 & \therefore\ 60 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 65^2 & = & 4\,225 & \therefore\ 65 < \sqrt{4\,489} < 70 \\ 67^2 & = & 4\,489 & \end{array}\right.$$

Resposta. $\sqrt{4\,489} = 67$

Exercícios em classe

Calcular pelo processo espontâneo:

1. $\sqrt{225}$	3. $\sqrt{961}$	5. $\sqrt{5\,776}$	7. $\sqrt{1\,296}$
2. $\sqrt{625}$	4. $\sqrt{1\,764}$	6. $\sqrt{8\,649}$	8. $\sqrt{2\,916}$

N. B. No exercício modêlo dêste parágrafo, para indicar que 10 é menor que $\sqrt{4\,489}$, escrevemos $10 < \sqrt{4\,489}$; para indicar que 100 é maior que $\sqrt{4\,489}$, escrevemos $\sqrt{4\,489} < 100$. Para indicar que um número é maior que outro, é bastante colocar entre ambos um ângulo cuja abertura fique voltada para o número maior. Portanto, $9 > \sqrt{25}$ quer dizer que 9 é maior do que $\sqrt{25}$; $7 < \sqrt{64}$ quer dizer que 7 é menor que $\sqrt{64}$; $4 < \sqrt{25} < 6$ quer dizer que $\sqrt{25}$ é maior que 4, mas é menor que 6.

38. Processo usual para extrair uma raiz quadrada. Qual é a raiz quadrada de 837 581 481? Para determiná-la, vamos recorrer ao processo prático ou usual.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{8.37.58.14.81} & 28\,941 \\ \underline{4} & \\ 4\,3.7 & 48\times 8 \\ \underline{3\,8\,4} & \\ 5\,3\,5.8 & 569\times 9 \\ \underline{5\,1\,2\,1} & \\ 2\,3\,7\,1.4 & 5\,784\times 4 \\ \underline{2\,3\,1\,3\,6} & \\ 0\,5\,7\,8\,8.1 & 57\,881\times 1 \\ \underline{5\,7\,8\,8\,1} & \\ 0 & \end{array}$$

Regra. Divide-se o número dado em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda; a primeira classe à esquerda, pode ser constituída por um algarismo. Debaixo da primeira classe à esquerda (8), escreve-se o maior quadrado que ela contém, isto é, 4, cuja raiz (2) é escrita no lugar adequado, isto é, por cima do traço horizontal. Da pri-

meira classe à esquerda (8), diminue-se o maior quadrado que ela contém (4), e ao lado do resto (4), escreve-se a classe seguinte do radicando (37). **Separa-se um algarismo à direita** do número assim formado (437), e divide-se a parte que fica à esquerda (43), pelo dôbro da raiz obtida (por 4, que se escreve por baixo do traço horizontal). O quociente (8) é escrito ao lado da raiz, (ao lado de 2) e ao lado do dôbro da mesma raiz (ao lado de 4, por baixo do traço horizontal). Multiplica-se o número assim formado, (48) pelo mesmo quociente (8), e subtrai-se o produto (384) de 437. Ao lado do resto (53), escreve-se a classe seguinte do radicando (58). **Separa-se um algarismo à direita** do número assim formado (5 358), e divide-se a parte que fica à esquerda (535), pelo dôbro da raiz obtida. (A raiz obtida é 28; o dôbro é 56, que se escreve por baixo do traço horizontal e por baixo de 48.) O quociente (9) é escrito ao lado da raiz (ao lado de 28) e ao lado do dôbro da raiz (ao lado de 56). Multiplica-se o número assim formado (569) pelo mesmo quociente (9), e subtrai-se o produto (5 121) de 5 358. Ao lado do resto (237) escreve-se a classe seguinte do radicando (14), etc..

Primeiro exemplo. $\sqrt{61\,009} = ?$

$\sqrt{6.1\,0.0\,9}$	247
4	
2 1.0	44×4
1 7 6	
3 4 0.9	487×7
3 4 0.9	
0 0 0 0	

Resposta. $\sqrt{61\,009} = 247$

Segundo exemplo. $\sqrt{368\,449} = ?$

$\sqrt{3\,6.8\,4.4\,9}$	607
3 6	
0 8.4 4.9	$1\,207 \times 7$
8.4 4.9	
0 0 0 0	

Resposta. $\sqrt{368\,449} = 607$

Terceiro exemplo. $\sqrt{31\,528} = ?$

$\sqrt{3.1\,5.2\,8}$	177
1	
2 1.5	27×7
1 8 9	
2 6 2.8	347×7
2 4 2 9	
1 9 9	

Resposta.

$\sqrt{31\,528} = 177$ (com êrro inferior a 1 unidade, por falta)

$\sqrt{31\,528} = 178$ (com êrro inferior a 1 unidade, por excesso)

39. Prova da raiz quadrada. Extraída uma raiz quadrada' e para verificar se a operação está certa, é bastante elevar a raiz ao quadrado, e somar o resultado com o resto da operação, quando êste resto existe. A soma deverá ser igual ao radicando.

$\sqrt{5.58.54}$	236	2 | 0
1 5 8	43 × 3	2 | 0
2 9 5.4	466 × 6	
4 ⟶ 1 5 8		

A prova mais prática é a *prova dos noves*, por ser mais rápida, embora nos dê uma certeza relativa. Consideremos o exemplo ao lado. Tiram-se os noves da raiz; o resto é 2, que se escreve nos dois ângulos retos situados à esquerda da cruz. Multiplica-se 2 por 2 e escreve-se o produto à esquerda do resto da operação. Em seguida, tiram-se os noves de 4 ⟶ 158, como se se tratasse do número 4 158; o resto é *zero*. Finalmente, tiram-se os noves do radicando; o resto é *zero*. Os dois últimos restos, *zero* e *zero*, sendo iguais, é provável que a operação esteja certa.

Esta regra é fácil de justificar, considerando que

$$55\,854 = 236 \times 236 + 158 \quad \text{(E.M.P.V. § 98)}$$

Observação. A regra pode ser simplificada com a prática.

Convém também observar que *o resto não pode ser maior que o dôbro da raiz.* (§ 40) O valor máximo do resto é o dôbro da raiz. E' preciso prestar muita atenção a êste fato porque, quando o resto é maior que o dôbro da raiz, *a prova dos noves não acusa êste êrro.*

Exercícios. Série XI

1. $\sqrt{376\,996} =$	**4.** $\sqrt{52\,847} =$	**7.** $\sqrt{6\,155} =$
2. $\sqrt{25\,270\,729} =$	**5.** $\sqrt{12\,345\,678} =$	**8.** $\sqrt{16\,064\,064} =$
3. $\sqrt{1\,380} =$	**6.** $\sqrt{12\,625} =$	**9.** $\sqrt{844\,250} =$

10. A área de um quadrado é de 73 441 metros quadrados. Quanto mede o lado?

11. Quanto mede o lado de um quadrado cuja área é de 3 844 decímetros quadrados?

12. Uma fôlha de papel milimetrado, de forma quadrada, contém 2 025 centímetros quadrados. Qual é o comprimento da fôlha? E a largura?

13. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 8 974?

14. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 12 688?

15. Qual é o número cuja raiz quadrada, com êrro inferior a uma unidade, por falta, é 75, havendo um resto igual a 73?

16. Qual é o número cuja raiz quadrada, com êrro inferior a uma unidade, por falta, é 83, havendo um resto igual a 137?

40. O resto na extração da raiz quadrada. Nem todos os números são quadrados perfeitos. O número 40 não é um quadrado perfeito. A raiz quadrada de 40, com êrro inferior a uma unidade, por falta, é 6, porque 6 é o maior número cujo quadrado é inferior a 40. Ora, $6^2 = 36$ e $40 - 36 = 4$. Ao número 4 dá-se o nome de **resto.**

Na divisão, o resto é sempre menor do que o divisor ; na extração da raiz quadrada o resto pode ser igual à raiz ; pode ser maior do que a raiz; pode ser igual ao dôbro da raiz; **mas não pode ser maior do que o dôbro da raiz.**

Já vimos que a diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dôbro do menor e mais 1. (§ 33)

Nestas condições, sendo $\sqrt{49} = 7$, para que a raiz seja igual a 8 é necessário que o radicando 49 aumente de $2 \times 7 + 1$ unidades. Se o acréscimo do radicando for, no máximo, igual a 14 unidades, a raiz será 7 e o resto será 14, isto é, o dôbro da raiz.

Na extração da raiz quadrada, o resto pode ser igual à raiz, maior do que a raiz, igual ao dôbro da raiz; mas não pode ser maior do que o dôbro da raiz.

Exercícios. Série XII

1. Um terreno retangular mede 432m por 75m. Quanto medirá o lado de um terreno quadrado eqüivalente ao primeiro?

Observação. Duas figuras são iguais quando, superpostas, coincidem em toda a sua extensão ; são eqüivalentes quando têm a mesma área. Cortemos em papel milimetrado, um retângulo com 9cm por 4cm, e um quadrado com 6cm de lado. Estas duas figuras **não são iguais** porque não podem, absolutamente, coincidir; entretanto, são **eqüivalentes**, porque têm a mesma área, a saber : 36 centímetros quadrados.

2. Quanto mede o lado de um terreno quadrado eqüivalente a um terreno retangular de 847m por 252m?

3. Um terreno quadrado tem 435 metros de lado. Qual será o comprimento de um terreno retangular eqüivalente ao primeiro, e com 225 metros de largura?

4. Um terreno quadrado tem 297 metros de lado. Qual será o comprimento de um terreno retangular eqüivalente ao primeiro e com 99 metros de largura?

5. A raiz quadrada de um número é 87 e o resto é o maior possível. Qual é o número?

6. A raiz quadrada de um número é 76 e o resto é o maior possível. Qual é o número?

7. Sendo $x \times x = 1\,849$, quanto vale x?
8. Sendo $x^2 = 42\,025$, quanto vale x?
9. Sendo $2\,740 = x^2 + 36$, quanto vale x?
10. Sendo $172\,500 = x^2 + 275$, quanto vale x?
11. A soma das áreas de dois quadrados é 2 385 metros quadrados; a diferença é 207 metros quadrados. Quanto mede o lado de cada um dêsses quadrados?
12. A soma das áreas de dois quadrados é 3 874 metros quadrados; a diferença é 176 metros quadrados. Quanto mede o lado de cada um dêsses quadrados?
13. Comprei um terreno de forma quadrada, calculei a área e achei 172 225 metros quadrados. Mais tarde, procedendo novamente à avaliação da área do terreno, verifiquei que a primeira avaliação estava errada. Ao medir, pela primeira vez, o comprimento do lado do terreno, enganei-me e achei 8m mais do que realmente tem. Qual é a área exata do terreno?

41. Operações de terceira espécie. A adição e a subtração são *operações de primeira espécie;* a multiplicação e a divisão são *operações de segunda espécie.*

A quinta e a sexta operações fundamentais são a **potenciação** e a **radiciação.**

Teòricamente, a potenciação é uma operação muito simples. Com efeito, calcular 2^{10} é calcular o produto de dez fatores iguais a 2. Na prática é operação, por vêzes, penosa e demorada como, por exemplo, calcular 328^{25}. Mais tarde, no curso de Álgebra, travaremos conhecimento com os *logaritmos,* os quais nos permitirão calcular ràpidamente 328^{25}.

A radiciação é o inverso da potenciação. Elevando um certo número ao quadrado ou à segunda potência achámos 61 009.

Se quisermos *desfazer* o que fizemos na potenciação, *temos de extrair a raiz quadrada ou a raiz segunda* do número 61 009. E acharemos 247. Portanto, o que *compomos* na *potenciação, decompomos* na *radiciação.* Eis por que a potenciação é chamada *operação de composição* e a radiciação é chamada *operação de decomposição.* E ambas são chamadas **operações de terceira espécie.**

Em resumo, as operações fundamentais da Aritmética são seis:

operações de primeira espécie: *adição* e *subtração*
operações de segunda espécie: *multiplicação* e *divisão*
operações de terceira espécie: *potenciação* e *radiciação*

Podemos distribuir as seis operações em dois grupos:

operações diretas (ou de composição) . . $\left\{\begin{array}{l}\textit{adição}\\ \textit{multiplicação}\\ \textit{potenciação}\end{array}\right.$

operações inversas (ou de decomposição) . . $\left\{\begin{array}{l}\textit{subtração}\\ \textit{divisão}\\ \textit{radiciação}\end{array}\right.$

No campo dos números inteiros ou naturais, as três primeiras são sempre possíveis; as três últimas, nem sempre.

42. A radiciação. Já aprendemos a extrair a raiz quadrada ou segunda. Mas, além desta, temos também a raiz terceira ou raiz cúbica, a quarta, a quinta, a sexta, etc..

Raiz cúbica de um número dado é outro número que, elevado ao cubo, reproduz o número dado. A raiz cúbica de 64 é 4, porque $4^3 = 64$. E escreveremos $\sqrt[3]{64} = 4$.

Raiz quarta de um número dado é outro número que, elevado à quarta potência, reproduz o número dado. A raiz quarta de 81 é 3, porque $3^4 = 81$. E escreveremos: $\sqrt[4]{81} = 3$.

Raiz quinta de um número dado é outro número que, elevado à quinta potência, reproduz o número dado. A raiz quinta de 100 000 é 10, porque $10^5 = 100\,000$. E escreveremos: $\sqrt[5]{100\,000} = 10$.

E assim por diante.

Há, portanto, várias espécies de raízes, isto é, *raízes de graus diferentes.* E para indicar o *grau* de uma raiz, escreveremos um número no ângulo do radical, ao qual chamaremos **índice.** Portanto,

$\sqrt[3]{64}$ significa *raiz cúbica de* 64.

$\sqrt[4]{81}$ significa *raiz quarta de* 81.

$\sqrt[5]{32}$ significa *raiz quinta de* 32.

Os números 64, 81 e 32 são os **radicandos**, e os números 3, 4 e 5 são os **índices**. Em relação à raiz quadrada ou segunda não é costume escrever-se o índice 2; para indicar a raiz quadrada de 36 escreve-se $\sqrt{36}$ e não $\sqrt[2]{36}$.

A dificuldade da extração de uma raiz aumenta com o índice da mesma; quanto mais elevado é o índice, mais penosa é a extração da raiz correspondente. Contentemo-nos, por enquanto, com a extração da raiz quadrada; mais tarde, os *logaritmos* nos permitirão extrair qualquer raiz, sem dificuldade e ràpidamente.

Exercícios orais

1. $\sqrt[3]{1\,000} =$	4. $\sqrt[4]{81} =$	7. $\sqrt[5]{3\,125} =$	10. $\sqrt[6]{64} =$
2. $\sqrt[3]{8\,000} =$	5. $\sqrt[4]{10\,000} =$	8. $\sqrt[5]{243} =$	11. $\sqrt[8]{256} =$
3. $\sqrt[3]{729} =$	6. $\sqrt[4]{160\,000} =$	9. $\sqrt[5]{32} =$	12. $\sqrt[3]{216} =$

Exercícios. Série XIII

Calcular pelo **método espontâneo** (por tentativas):

1. $\sqrt[3]{3\,375}$	3. $\sqrt[4]{14\,641}$	5. $\sqrt[4]{20\,736}$	7. $\sqrt[25]{1}$
2. $\sqrt[5]{59\,049}$	4. $\sqrt[6]{15\,625}$	6. $\sqrt[4]{234\,256}$	8. $\sqrt[10]{59\,049}$

Calcular as expressões aritméticas seguintes:

9. $10 + 3^4 - 5 \times 2^5 \times \sqrt{484} + 3^3 \times 4^3 \times \sqrt[3]{8} - 80 \div \sqrt[3]{125}$

10. $\sqrt[4]{10\,000} + 7 \times \sqrt[3]{216} - 2 \times 3^5 \times 7^{10} \times 0 + \sqrt[40]{1} + 5^2 \times \sqrt{625}$

Observação. Efetuar **em primeiro lugar** as operações de terceira espécie, depois as de segunda e, por último, as de primeira.

43. Teoremas relativos às potências e raízes. I. *Para multiplicar duas potências de uma mesma base, é bastante somar os expoentes.* A significação dêste teorema é fácil de compreender; se tivéssemos de enunciá-lo completamente, deveríamos dizer:

«Para multiplicar duas potências de uma mesma base, basta formar outra potência cuja base seja a comum aos fatores, e cujo expoente seja a soma dos expoentes dos fatores.»

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$$

Pela lei associativa da multiplicação, resulta:

$$a^3 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$$

Finalmente, da definição de potência, resulta:

$$a^3 \times a^4 = a^7$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Fàcilmente se provará que ..... $a^2 \times a^3 \times a^5 = a^{10}$, etc..

Dêste teorema resulta que:

$a^7 = a^2 \times a^5 = a \times a^6$ $\quad x^{10} = x^4 \times x^6 = x^3 \times x^2 \times x^5$, etc..

II. *Para multiplicar duas potências com expoentes iguais, porém com bases diferentes, multiplicam-se as bases e dá-se ao produto o expoente comum aos fatores.*

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$$

Em virtude das propriedades associativa e comutativa da multiplicação, podemos escrever sucessivamente:

$$\begin{aligned} 2^3 \times 5^3 &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \\ &= 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \end{aligned}$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{a^m \times b^m = (a \times b)^m}$$

Dêste teorema resulta que:

$6^3 = 2^3 \times 3^3 \qquad 15^4 = 3^4 \times 5^4 \qquad 21^2 = 3^2 \times 7^2$, etc..

III. *Para dividir duas potências diferentes, de uma mesma base, é bastante diminuir o expoente do divisor do expoente do dividendo.*

Vamos provar que .... $a^7 \div a^4 = a^3$.

Com efeito, assim é porque ..... $a^3 \times a^4 = a^7$.

E, de um modo geral,

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

Observação. Na aplicação dêste teorema devemos ter $m > n$. Para $m = n$ ou $m < n$ acharemos certos *resultados singulares* que serão interpretados mais tarde.

Do teorema que acabámos de demonstrar resulta que:

$$a^2 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a^6}{a^4} = \frac{a^8}{a^6}, \text{ etc..}$$

IV. *Para elevar uma potência dada, a uma potência qualquer, é bastante multiplicar os expoentes.*

Com efeito, pela definição de potência, temos:

$$(a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4$$

E, de acôrdo com o primeiro teorema, resulta:

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

Podemos, pois, escrever de um modo geral:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Portanto, $\quad a^{12} = (a^4)^3 = (a^3)^4 = (a^2)^6 = (a^6)^2$

V. *Para extrair uma raiz dada, de uma potência dada, é bastante dividir o expoente da potência pelo índice da raiz.*

Por exemplo, $\quad \sqrt[3]{a^{12}} = a^4$.

Com efeito, assim é porque, elevando a^4 à terceira potência, teremos, de acôrdo com o terceiro teorema:

$$(a^4)^3 = a^{12}$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{\sqrt[n]{\mathbf{a}^m} = \mathbf{a}^{\frac{m}{n}}}$$

Observação. Por ora devemos admitir que m é divisível por n.

44. Adição e subtração de potências. O que dissemos no parágrafo anterior se resume nas fórmulas seguintes:

I. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	III. $(a^m)^n = a^{mn}$
II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$	IV. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

E' interessante observar que:

a) A **multiplicação** *de potências se reduz a uma* **adição** *de expoentes.*

b) A **divisão** *de potências se reduz a uma* **subtração** *de expoentes.*

c) A **potenciação** *de potências se reduz a uma* **multiplicação** *de expoentes.*

d) A **radiciação** *de potências se reduz a uma* **divisão** *do expoente da potência pelo índice da raiz.*

Isto é,

As operações de segunda espécie se reduzem a operações de primeira.

As operações de terceira espécie se reduzem a operações de segunda.

Entretanto, em relação à adição e à subtração de potências, *não há outra cousa a fazer,* senão calcular as potências e depois, somar ou subtrair, porque não há operações mais simples que a adição e a subtração.

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24; \quad 3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$$
$$5^3 - 5^2 + 5^4 - 5 = 125 - 25 + 625 - 5 = 720$$

45. Potência de um produto. *Para elevar um produto de dois ou mais fatores a uma potência dada, é bastante elevar cada um dos fatores à potência dada, e multiplicar os resultados.*

Vamos mostrar que:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 11^3$$

Com efeito, pela definição de potência, teremos:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = (5^2 \times 7^3 \times 11) \times (5^2 \times 7^3 \times 11) \times (5^2 \times 7^3 \times 11)$$

Lembrando as propriedades associativa e comutativa da multiplicação, podemos escrever:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 11 \times 11 \times 11$$

Finalmente, associando as potências com bases iguais, concluiremos que:

$$(5^2 \times 7^3 \times 11)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 11^3$$

E, de um modo geral, podemos escrever:

$$\boxed{(a^m \times b^n \times c^r)^u = a^{mu} \times b^{nu} \times c^{ru}}$$

46. A característica de um quadrado perfeito. *Um número inteiro é* **quadrado perfeito** *quando é o* **quadrado** *de um outro número inteiro.* Por exemplo, os números $961 (= 31^2)$, $2\,704 (= 52^2)$, $4\,096 (= 64^2)$, etc., são quadrados perfeitos.

Consideremos o número 360. Decompondo-o em fatores primos, teremos:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

De acôrdo com o teorema conhecido (§45) teremos:

$$(2^3 \times 3^2 \times 5)^2 = 2^6 \times 3^4 \times 5^2$$

Portanto,

Para elevar ao quadrado **um número inteiro decomposto em seus fatores primos,** *é bastante* **duplicar** *o expoente de cada um dos fatores.*

Ora, a decomposição de um número inteiro em fatores primos pode ser efetuada de um único modo. Portanto, se decompusermos um *quadrado perfeito* em seus fatores primos, *os expoentes*

dêstes fatores primos serão números pares. E' esta uma condição necessária para que um número inteiro seja quadrado perfeito.

Recìprocamente, se, decompondo um número inteiro em fatores primos, verificamos que os expoentes dêstes fatores primos são números pares, podemos afirmar que êste número inteiro é um quadrado perfeito. Por exemplo, os números 324, 400, 196 são quadrados perfeitos porque

$$324 = 2^2 \times 3^4 \qquad 400 = 2^4 \times 5^2 \qquad 196 = 2^2 \times 7^2$$

Podemos agora concluir com a **característica de um quadrado perfeito:**

Para que um número inteiro seja um quadrado perfeito, é necessário e suficiente que contenha sòmente fatores primos com expoentes pares.

Exercícios. Série XIV

Calcular as expressões que se seguem.

1. $3^2 \times 3 - 2^3 \times 2 + 5^3 \times 5 \times 5^2 - 7^2 \times 7$
2. $5^2 \times 5^3 + 7^2 \times 7 - 4^3 \times 4 - 3^2 \times 3 \times 3^3$
3. $7^3 \div 7 + 11^4 \div 11^2 - 5^3 \times 5 \div 5^2 + 2^7 \div 2^4$
3. $(2^3)^5 \times (2^4)^2 \div (2^2)^3 \times (2^4)^5$
5. $(7^2)^5 \times (7^3)^4 \div (7^5)^3 \div 7^2$
6. $\sqrt[3]{5^{12}} + \sqrt[4]{5^8} - \sqrt{5^2}$
7. $3 \times 2^3 \times 2^5 + 5(2^2)^4 - 7 \times 2^7 \times 2 + 2^3$ R. 264
8. $2^{10} \div 2^7 - 3 \times 2^8 \div 2^5 + 4 \times 2 \times 2^2 - 2^4$ R. 0

Simplificar as expressões que se seguem.

9. $\dfrac{x^3 \times a^4 \times x^5 \times a^3}{a^2 \times x^4 \times a^6 \times x^3}$ | 10. $\dfrac{a^2 \times b^5 \times a^6 \times b^6}{a^3 \times a^4 \times b^6 \times b^7}$

Nos exercícios que se seguem, os números múltiplos deverão ser prèviamente decompostos em fatores primos. Calcular as expressões seguintes :

11. $\left\{\dfrac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{30^2} + \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 5^2}{30^2}\right\}^2$ R. 25

12. $\left\{\dfrac{3 \times 5 \times 7}{3 \times 7} + \dfrac{3^2 \times 5 \times 7^2}{441}\right\}^2$ R. 100

Determinar o menor número pelo qual devemos multiplicar cada um dos números que se seguem, para que o resultado seja um quadrado perfeito.

13. 180 | **14.** 250 | **15.** 22 050 | **16.** 693 594

47. Quadrado das frações decimais. O quadrado de 0,7 é 0,7 × 0,7 ou 0,49. O quadrado de 0,16 é 0,16 × 0,16 ou 0,0256. O quadrado de 0,031 é 0,031 × 0,031 ou 0,000961. Donde se conclue que, elevar uma fração decimal ao quadrado ou à segunda potência, é uma operação que não oferece a menor dificuldade e que obedece à seguinte

Regra. *Para calcular o quadrado de uma fração decimal, é bastante multiplicá-la por si mesma.*

Exemplos

$0{,}047^2 = ?$	$3{,}15^2 = ?$	$0{,}612^2 = ?$
0,047	3,15	0,612
0,047	3,15	0,612
329	1575	1224
188	315	612
0,002209	945	3672
	9,9225	0,374544
$0{,}047^2 = 0{,}002\,209$	$3{,}15^2 = 9{,}922\,5$	$0{,}612^2 = 0{,}374\,544$

Exercícios orais

1. $0{,}2^2 =$	**6.** $0{,}01^2 =$	**11.** $1{,}2^2 =$	**16.** $0{,}001^2 =$
2. $0{,}5^2 =$	**7.** $0{,}003^2 =$	**12.** $2{,}5^2 =$	**17.** $0{,}0002^2 =$
3. $0{,}7^2 =$	**8.** $0{,}005^2 =$	**13.** $1{,}6^2 =$	**18.** $0{,}004^2 =$
4. $0{,}8^2 =$	**9.** $0{,}006^2 =$	**14.** $0{,}02^2 =$	**19.** $0{,}0001^2 =$
5. $0{,}9^2 =$	**10.** $0{,}007^2 =$	**15.** $0{,}0003^2 =$	**20.** $0{,}0005^2 =$

48. Raiz quadrada das frações decimais. Para calcular o quadrado de 0,34 é necessário multiplicar 0,34 por 0,34. Para

multiplicar 0,34 por 0,34 suprimem-se mentalmente as vírgulas, multiplica-se 34 por 34 e no produto que é 1 156 separam-se com a vírgula, a partir da direita, quatro algarismos decimais.

$$0{,}34^2 = 0{,}34 \times 0{,}34 = 0{,}1156$$

E observe-se bem que *a base* 0,34 *tendo dois algarismos decimais, o quadrado* 0,115 6 *tem quatro algarismos decimais.* Calculando $0{,}234^2$ acharemos 0,054 756 e verificaremos que a base 0,234 *tendo três algarismos decimais, o quadrado* 0,054 756 *tem seis algarismos decimais.* Êstes dois exemplos são suficientes para compreender que, se uma fração decimal tem um, dois, três, quatro, cinco, etc., algarismos decimais, seu quadrado tem dois, quatro, seis, oito, dez, etc., algarismos decimais.

Do exposto se conclue que uma fração decimal, para ser quadrado perfeito, deve ter um número par de algarismos decimais. Entretanto, uma fração decimal que tem um número par de algarismos decimais, nem sempre é quadrado perfeito. Por exemplo, qual será a fração decimal que, elevada ao quadrado, dá 0,45? Não é 0,6 porque $0{,}6^2 = 0{,}36$. Não é 0,7 porque $0{,}7^2 = 0{,}49$. Então, tal qual como acontece com os números inteiros, temos de aceitar uma raiz aproximada e, raciocinando como no parágrafo 35, diremos:

$\sqrt{0{,}45} = 0{,}6$ (com êrro inferior a 0,1 por **falta**)

$\sqrt{0{,}45} = 0{,}7$ (com êrro inferior a 0,1 por **excesso**)

Exercícios orais

1. $\sqrt{0{,}04} =$	**6.** $\sqrt{0{,}8} =$	**11.** $\sqrt{0{,}0144} =$
2. $\sqrt{0{,}0025} =$	**7.** $\sqrt{0{,}007} =$	**12.** $\sqrt{0{,}0500} =$
3. $\sqrt{0{,}0121} =$	**8.** $\sqrt{0{,}30} =$	**13.** $\sqrt{0{,}0900} =$
4. $\sqrt{0{,}0625} =$	**9.** $\sqrt{0{,}0036} =$	**14.** $\sqrt{0{,}0008} =$
5. $\sqrt{0{,}81} =$	**10.** $\sqrt{0{,}000250} =$	**15.** $\sqrt{0{,}00025} =$

Vejamos agora como se extrai a raiz quadrada de uma fração decimal. Qual é a raiz quadrada de 0,144 4? Já sabemos que é uma fração decimal com *dois algarismos decimais.* (§ 48) Mas, como determinar esta fração decimal? De um modo muito simples:

procurando um número x que, elevado ao quadrado, reproduza o número 1 444 e, uma vez obtido o valor de x, separar nele, da direita para a esquerda, e com o auxílio da vírgula, *dois algarismos decimais*. Ora, extraindo a raiz quadrada de 1 444, acharemos 38 ; portanto, $\sqrt{0{,}1444} = 0{,}38$. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *Para extrair a raiz quadrada de uma fração decimal, suprime-se mentalmente a vírgula, extrai-se a raiz quadrada do número inteiro resultante e separa-se no resultado, com a vírgula, e da direita para a esquerda, um número de algarismos decimais igual à metade do número de algarismos decimais do radicando.*

Exemplos

$\sqrt{0{,}054\,756} = ?$

```
√ 0,054756 | 0,234
    4      |--------
   ----    |
   14.7    |  43×3
   12 9    |
   ------  |
   1 85.6  | 464×4
   1 85 6  |
   ------  |
        0  |
```

$\sqrt{0{,}005\,329} = ?$

```
√ 0,005329 | 0,073
      49   |--------
     ----  |
     42.9  | 143×3
     42 9  |
     ----  |
        0  |
```

$\sqrt{5{,}173\,425} = ?$

```
√ 5,173425   | 2,274
  4          |--------
  ----       |
  11.7       |  42×2
   8 4       |
  --------   |
   3 33.4    | 447×7
   3 12 9    |
  --------   |
     20 52.5 | 4544×4
     18 17 6 |
  --------   |
      2 34 9 |
```

Em relação aos dois primeiros exemplos, os radicandos são quadrados perfeitos. Em relação ao terceiro, não acontece o mesmo ; o radicando não é quadrado perfeito e sua raiz aproximada é 2,274. E, raciocinando como no parágrafo 35,

$$\sqrt{5{,}173\,425} = 2{,}274 \text{ (com êrro inferior a 0,001 por } \textbf{falta}\text{)}$$

$$\sqrt{5{,}173\,425} = 2{,}275 \text{ (com êrro inferior a 0,001 por } \textbf{excesso}\text{)}$$

Pode acontecer que o radicando seja uma fração decimal com um número ímpar de algarismos decimais. Seja a fração decimal 0,734 85 da qual se pede a raiz quadrada. Aplicando a regra, surge uma séria dificuldade para os estudantes. Ora, dirão êles, se o radicando tem *cinco algarismos decimais, como separar na raiz, dois algarismos decimais e meio*?

Uma fração decimal não muda de valor se escrevermos à direita da parte fracionária tantos zeros quantos quisermos. Por-

tanto, 0,73 485 = 0,734 850. Então os estudantes, em lugar de extraírem a raiz quadrada de 0,734 85, extraem a raiz quadrada de 0,734 850 e a dificuldade estará removida.

Exercícios. Série XV

1. $\sqrt{0{,}182\,329} =$	**6.** $\sqrt{0{,}423\,75} =$	**11.** $\sqrt{3{,}785} =$
2. $\sqrt{43{,}522\,7} =$	**7.** $\sqrt{614{,}329} =$	**12.** $\sqrt{0{,}123\,456} =$
3. $\sqrt{26{,}419\,6} =$	**8.** $\sqrt{36{,}748\,2} =$	**13.** $\sqrt{4\,537{,}8} =$
4. $\sqrt{0{,}074\,685\,24} =$	**9.** $\sqrt{9{,}009\,37} =$	**14.** $\sqrt{0{,}649\,31} =$
5. $\sqrt{0{,}094\,249} =$	**10.** $\sqrt{16{,}0400\,25} =$	**15.** $\sqrt{0{,}000\,385} =$

16. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 0,736?

17. Qual é o maior quadrado perfeito contido em 3,272 1?

18. Qual é a diferença entre o número 0,481 5 e o maior quadrado perfeito nele contido?

19. Qual é a diferença entre o número 0,535 e o maior quadrado perfeito nele contido?

20. Decompor o número 0,157 34 em duas parcelas, de modo que uma delas seja o maior quadrado perfeito contido nesse número.

49. Raiz quadrada com êrro predeterminado. Consideremos o número 10. Qual é a sua raiz quadrada?

$\sqrt{10} = 3$ (com êrro inferior a 1 unidade, por **falta**)

$\sqrt{10} = 4$ (com êrro inferior a 1 unidade, por **excesso**)

Mas 10 é evidentemente igual a 10,00. Extraindo a raiz quadrada de 10,00 teremos: $\sqrt{10{,}00} = 3{,}1$. Logo,

$\sqrt{10} = 3{,}1$ (com êrro inferior a 0,1 por **falta**)

$\sqrt{10} = 3{,}2$ (com êrro inferior a 0,1 por **excesso**)

Seja o número 8. Suas raízes quadradas, com êrro inferior a uma unidade, por falta e por excesso, são 2 e 3. Mas, 8 é evidentemente igual a 8,0000. Extraindo a raiz quadrada de 8,0000 teremos: $\sqrt{8{,}0000} = 2{,}82$. Logo,

$\sqrt{8} = 2{,}82$ (com êrro inferior a 0,01 por **falta**)

$\sqrt{8} = 2{,}83$ (com êrro inferior a 0,01 por **excesso**)

Seja o número 13. Suas raízes quadradas, com êrro inferior a uma unidade, por falta e por excesso, são 3 e 4. Mas, 13 é evi-

dentemente igual a 13,000 000. Extraindo a raiz quadrada de 13,000 000 teremos: $\sqrt{13{,}000\,000} = 3{,}605$. Logo,

$\sqrt{13} = 3{,}605$ (com êrro inferior a 0,001 por **falta**)

$\sqrt{13} = 3{,}606$ (com êrro inferior a 0,001 por **excesso**)

Raiz quadrada aproximada a menos de 0,1 ou 0,01 ou 0,001 é a mesma coisa que raiz quadrada com êrro inferior a 0,1 ou 0,01 ou 0,001 ou raiz quadrada com um, dois ou três algarismos decimais. O que aprendemos nestes três últimos exemplos é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Para extrair a raiz quadrada de um número inteiro ou fração decimal, com êrro inferior a 0,1 ou 0,01 ou 0,001 juntam-se ao número dado tantos zeros quantos sejam necessários para que êle fique com dois ou quatro ou seis algarismos decimais. Em seguida, depois de extraída a raiz, separa-se no resultado, com a vírgula, e da direita para a esquerda, um número de algarismos decimais igual à metade do número de algarismos decimais do radicando.*

Primeiro exemplo. Calcular $\sqrt{2}$ com êrro inferior a 0,001. E' bastante calcular $\sqrt{2{,}000000}$. $\sqrt{2} = 1{,}414$.

Segundo exemplo. Calcular $\sqrt{3{,}4}$ com êrro inferior a 0,01. E' bastante calcular $\sqrt{3{,}4000}$. $\sqrt{3{,}4} = 1{,}84$.

Terceiro exemplo. Calcular $\sqrt{0{,}07}$ com êrro inferior a 0,001. E' bastante calcular $\sqrt{0{,}070000}$. $\sqrt{0{,}07} = 0{,}264$.

Quarto exemplo.

Calcular $\sqrt{0{,}0015}$ com êrro inferior a 0,0001.

$\sqrt{0{,}0015} = \sqrt{0{,}00150000}$

```
√0,00150000  | 0,0387
  9          |
  60.0       | 68×8
  54 4       |
   5 60.0    | 767×7
   5 36 9    |
     23 1    |
```

Resposta. $\sqrt{0{,}0015} = 0{,}0387$
Resto = 0,000 002 31

Quinto exemplo.

Calcular $\sqrt{0{,}4726}$ com êrro inferior a 0,001.

$\sqrt{0{,}4726} = \sqrt{0{,}472600}$

```
√0,472600    | 0,687
  36         |
  112.6,     | 128×8
  102 4      |
   10 20.0   | 1367×7
    9 56 9   |
      63 1   |
```

Resposta. $\sqrt{0{,}4726} = 0{,}687$
Resto = 0,000 631

Exercícios. Série XVI

Calcular as raízes que se seguem, com êrro inferior ao que está indicado entre parênteses.

1. $\sqrt{2}$	(0,000 000 1)	6. $\sqrt{1,142\,2}$	(0,001)
2. $\sqrt{3}$	(0,000 000 1)	7. $\sqrt{0,007\,4}$	(0,000 1)
3. $\sqrt{5}$	(0,000 000 1)	8. $\sqrt{0,003}$	(0,000 01)
4. $\sqrt{5,7}$	(0,001)	9. $\sqrt{0,000\,7}$	(0,000 01)
5. $\sqrt{0,325}$	(0,001)	10. $\sqrt{0,000\,001\,5}$	(0,000 001)

11. Uma sala de forma quadrada tem uma área de 67 metros quadrados. Qual é o comprimento do lado desta sala?

N. B. O comprimento do lado da sala deverá ser calculado com êrro inferior a 0,001 por falta.

12. Um retângulo tem 37 metros de comprimento e 25 metros de largura. Calcular com êrro inferior a 0,001, o lado de um quadrado eqüivalente a êste retângulo.

13. Qual é o número cuja raiz quadrada com êrro inferior a 0,01 por falta é 7,42 havendo um resto igual a 0,0568?

14. Qual é o número cuja raiz quadrada, com êrro inferior a 0,001 por excesso é 0,078 sendo o resto da operação igual a 0,0000 94?

50. Quadrado das frações ordinárias. O quadrado de $\frac{3}{4}$ é, por definição, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$, isto é, $\frac{9}{16}$. O quadrado de $\frac{2}{5}$ é, definição, $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$, isto é, $\frac{4}{25}$. Portanto, para calcular o quadrado ou a segunda potência de uma fração ordinária, é bastante multiplicá-la por si mesma. Para indicar o quadrado de uma fração ordinária, é necessário colocar a fração entre parênteses e colocar o expoente 2 à direita e um pouco acima dos parênteses; ou então dar o expoente a cada um dos têrmos.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}; \quad \frac{3^2}{7^2} = \frac{3 \times 3}{7 \times 7} = \frac{9}{49}$$

Exercícios orais

1. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 =$	3. $\frac{7}{10^2} =$	5. $\left(\frac{6}{11}\right)^2 =$
2. $\left(\frac{3}{8}\right)^2 =$	4. $\frac{3^2}{4^2} =$	6. $\frac{2^2}{5} =$

7. $\dfrac{3}{5^2} =$

8. $\dfrac{8^2}{9^2} =$

9. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 =$

10. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 =$

11. $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^2 =$

12. $\left(1\dfrac{3}{4}\right)^2 =$

13. $\left(2\dfrac{1}{3}\right)^2 =$

14. $\left(3\dfrac{1}{3}\right)^2 =$

15. $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^2 =$

16. A fração $\dfrac{16}{25}$ é o quadrado de $\dfrac{4}{5}$? Por que?

17. A fração $\dfrac{4}{25}$ é o quadrado de $\dfrac{4}{5}$? Por que?

18. O quadrado de uma fração ordinária é igual à fração? O quadrado de $\dfrac{3}{5}$ é igual a $\dfrac{3}{5}$? Por que? E' maior ou menor? Por que? E o quadrado de $\dfrac{5}{3}$ é igual a $\dfrac{5}{3}$? Por que? E' maior ou menor? Por que? Conclusão?

Exercícios. Série XVII

1. Calcular a diferença entre $\dfrac{13}{25}$ e o quadrado de $\dfrac{13}{25}$.

2. Calcular a diferença entre $\dfrac{16}{11}$ e o quadrado de $\dfrac{16}{11}$.

3. Calcular $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

4. Calcular $\left(2\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^2 + \dfrac{7^2}{5}$

5. Calcular $\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right]^2 + \dfrac{2}{5}$ de $\left(3\dfrac{1}{4}\right)^2$

6. Calcular $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^2 \div \dfrac{3}{5^2} + \dfrac{3}{8}$

51. Raiz quadrada das frações ordinárias. Desde que $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$, segue-se que $\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$; sendo $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{36}$, resulta $\sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{5}{6}$.

Regra. *Para extrair a raiz quadrada de uma fração ordinária, extrai-se a raiz quadrada de cada um de seus têrmos.*

Entretanto, esta regra pouca aplicação tem na prática porque, em geral, as frações ordinárias das quais se pede a raiz qua-

drada não são *quadrados perfeitos*. Para que a fração ordinária seja quadrado perfeito, é necessário que cada um de seus têrmos seja quadrado perfeito, e isto raramente se dá na prática. E' conveniente, então, obedecer à seguinte

Regra. *Para extrair a raiz quadrada de uma fração ordinária que não é quadrado perfeito, e com êrro inferior a* 0,1 *ou* 0,01 *ou* 0,001, *multiplicam-se os dois têrmos da fração por um número tal que o denominador se torne quadrado perfeito; extrai-se a raiz quadrada do numerador, com êrro inferior a* 0,1 *ou* 0,01 *ou* 0,001 (§ 49), *e divide-se o resultado pela raiz quadrada do denominador.*

Primeiro exemplo. Calcular $\sqrt{\frac{3}{7}}$ com êrro inferior a 0,01.

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3 \times 7}{7 \times 7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,58}{7} = 0,65$$

$\sqrt{\frac{3}{7}} = 0,65$ (com êrro inferior a 0,01 por *falta*)

$\sqrt{\frac{3}{7}} = 0,66$ (com êrro inferior a 0,01 por *excesso*)

Segundo exemplo. Calcular $\sqrt{2\frac{1}{8}}$ com êrro inferior a 0,001.

$$\sqrt{2\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{17}{8}} = \sqrt{\frac{17 \times 2}{8 \times 2}} = \sqrt{\frac{34}{16}} = \frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{5,830}{4} = 1,457$$

$\sqrt{2\frac{1}{8}} = 1,457$ (com êrro inferior a 0,001 por *falta*)

$\sqrt{2\frac{1}{8}} = 1,458$ (com êrro inferior a 0,001 por *excesso*)

Vejamos agora como se determina a raiz quadrada de um número dado, com êrro inferior a uma unidade fracionária qualquer também dada, por falta e por excesso.

Exercício. *Calcular* $\sqrt{7}$, *com êrro inferior a* $\frac{1}{5}$, *por falta e por excesso.*

Preliminarmente, multiplicamos e dividimos o radicando pelo **quadrado do denominador da unidade fracionária dada.**

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7 \times 25}{25}} = \sqrt{\frac{175}{25}} = \frac{\sqrt{175}}{5}$$

Ora, $\sqrt{175} = 13$ (com êrro inferior a uma unidade, por falta)

$\sqrt{175} = 14$ (» » » » » » » excesso)

Donde resulta que: $\frac{13}{5} < \sqrt{7} < \frac{14}{5}$

Mas, a diferença entre $\frac{13}{5}$ e $\frac{14}{5}$ é $\frac{1}{5}$. Logo,

$$\sqrt{7} - \frac{13}{5} < \frac{1}{5} \qquad \frac{14}{5} - \sqrt{7} < \frac{1}{5}$$

Portanto, $\sqrt{7} = \frac{13}{5}$ (com êrro inferior a $\frac{1}{5}$, por falta)

$\sqrt{7} = \frac{14}{5}$ (» » » » » » excesso)

Exercícios. Série XVIII

Calcular as raízes que se seguem, com êrro inferior ao que está indicado entre parênteses.

1. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (0,001)
2. $\sqrt{4\frac{3}{4}}$ (0,001)
3. $\sqrt{5\frac{1}{3}}$ (0,000 1)
4. $\sqrt{\frac{13}{64}}$ (0,001)
5. $\sqrt{\frac{119}{625}}$ (0,001)
6. $\sqrt{\frac{7}{15}}$ (0,01)
7. $\sqrt{\frac{11}{43}}$ (0,001)
8. $\sqrt{1\frac{7}{12}}$ (0,001)
9. $\sqrt{\frac{19}{36}}$ (0,001)
10. $\sqrt{\frac{11}{40}}$ (0,000 1)
11. Calcular $\sqrt{11}$ com êrro inferior a $\frac{1}{7}$.
12. » $\sqrt{12}$ » » » » $\frac{1}{8}$.

13. Calcular $\sqrt{13}$ com êrro inferior a $\frac{1}{10}$.

14. » $\sqrt{14}$ » » » » $\frac{1}{12}$.

15. » $\sqrt{15}$ » » » » $\frac{1}{20}$.

52. Uso das tabelas. As tabelas apresentadas nas páginas 204 a 213 nos dão o quadrado e o cubo dos números inteiros, de 1 a 1 000, assim como a raiz quadrada e a raiz cúbica dêstes mesmos números, com êrro inferior a meio décimo milésimo, por falta ou por excesso.

As mesmas tabelas nos permitem também, em alguns casos, determinar a raiz quadrada (ou cúbica) de um número que não seja quadrado (ou cubo) perfeito, com uma certa aproximação. E' o que vamos mostrar com alguns exemplos.

1.° exemplo. Calcular $\sqrt{1\,410}$.

$$\sqrt{1\,410} = \sqrt{1\,410{,}00}$$

Na coluna dos quadrados, o número 141 000 está compreendido entre os números 140 625 (quadrado de 375) e 141 376 (quadrado de 376). Logo, (§ 49)

$$\sqrt{1\,410} = 37{,}5 \text{ (com êrro inferior a 0,1 por falta)}$$

2.° exemplo. Calcular $\sqrt{23\,560}$.

Na coluna dos quadrados, o número 23 560 está compreendido entre os números 23 409 (quadrado de 153) e 23 716 (quadrado de 154). Logo

$$\sqrt{23\,560} = 153 \text{ (com êrro inferior a 1 unidade, por falta)}$$

3.° exemplo. Calcular $\sqrt[3]{2\,156}$.

$$\sqrt[3]{2\,156} = \sqrt[3]{2\,156{,}000}$$

Na coluna dos cubos, o número 2 156 000 está compreendido entre os números 2 146 689 (cubo de 129) e 2 197 000 (cubo de 130). Logo,

$$\sqrt[3]{2\,156} = 12{,}9 \text{ (com êrro inferior a 0,1 por falta)}$$

4.º exemplo. Calcular $\sqrt[3]{70\,428}$.

Procedendo como no exemplo anterior, acharemos:

$$\sqrt[3]{70\,428} = 41{,}2 \text{ (com êrro inferior a 0,1 por falta)}$$

Assim, as nossas tabelas nos dão também as raízes quadradas aproximadas dos números que não são quadrados perfeitos, incluídos entre 1 e 1 000 000, assim como as raízes cúbicas aproximadas dos números que não são cubos perfeitos, incluídos entre 1 e 1 000 000 000.

No caso de uma fração decimal, já sabemos como proceder. (§ 48) Por exemplo:

$$\sqrt{0{,}726} = \frac{\sqrt{7\,260}}{100} \quad \Big| \quad \sqrt{0{,}438\,256} = \frac{\sqrt{438\,256}}{1\,000} \quad \Big| \quad \sqrt[3]{0{,}495} = \frac{\sqrt[3]{495}}{10}$$

Capítulo III

Razões e Proporções

53. Razão. Dois números quaisquer, por exemplo, 15 e 5, podem ser comparados de dois modos diferentes: ou determinando o excesso do primeiro sôbre o segundo, ou determinando quantas vêzes o primeiro contém o segundo. No primeiro caso, teremos de efetuar uma subtração e o resultado será o número 10; no segundo caso, teremos de efetuar uma divisão e o resultado será o número 3.

Entretanto, em lugar de efetuar estas duas operações, vamos apenas indicá-las; teremos assim as expressões aritméticas $15 - 5$ e $15 \div 5$. A estas expressões dá-se, em Matemática, o nome de *razão*. Portanto,

Razão de dois números é o resultado indicado (*) da comparação dêstes dois números.

Desde que há dois modos diferentes de comparar dois números, conclue-se que há duas espécies de razões:

a) *razão aritmética ou razão por diferença.*

b) *razão geométrica ou razão por quociente.*

Razão aritmética ou razão por diferença de dois números dados é a diferença indicada, não calculada, dêstes dois números dados. A razão aritmética ou razão por diferença dos números 18 e 12 é $18 - 12$; dos números a e b é $a - b$; dos números $2x$ e $3y$ é $2x - 3y$.

Razão geométrica ou razão por quociente de dois números dados é o quociente indicado, não calculado, dêstes dois números dados. A razão geométrica ou razão por quociente dos números 30 e 6 é $30 \div 6$; dos números a e b é $a \div b$; dos números $2x$ e $3y$ é $2x \div 3y$.

(*) Dizemos *indicado* porque, em todas as questões teóricas, a razão de dois números aparece sempre indicada.

Em lugar de *razão aritmética* ou *razão por diferença* se diz apenas **diferença**; em lugar de *razão geométrica* ou *razão por quociente* se diz apenas **razão**. Portanto, na continuação do nosso curso, a palavra **razão** significará sempre o quociente indicado, não calculado, de dois números quaisquer.

Os dois números que constituem uma razão aritmética ou geométrica são chamados *têrmos da razão*. O primeiro têrmo é chamado **antecedente** e o segundo, **conseqüente.**

Quando a razão é aritmética, coloca-se entre seus têrmos o sinal *menos* ou um ponto. Por exemplo, para indicar a razão aritmética dos números a e b, escreveremos:

$a - b$ (a menos b)
$a \,.\, b$ (a está para b)

Quando a razão é geométrica, coloca-se o antecedente sôbre o conseqüente, separando os dois têrmos por um traço de fração, ou então colocam-se dois pontos entre os dois têrmos. Por exemplo, para indicar a razão geométrica dos números a e b escreveremos:

$\dfrac{a}{b}$ (a sôbre b, ou $a \div b$)

$a : b$ (a está para b)

54. Razão aritmética. Desde que a razão aritmética é a diferença indicada de dois números, conclue-se que o *antecedente é um minuendo e o conseqüente é um subtraendo.* Por exemplo, considerando a razão aritmética $11 - 8$, o antecedente 11 é um minuendo, o conseqüente 8 é um subtraendo, e o valor da razão aritmética $11 - 8$, é o resto. Portanto, todas as propriedades da subtração se aplicam, sem restrições, às razões aritméticas. Por exemplo:

a) *Somando ou diminuindo* n *unidades ao antecedente, a razão aritmética aumenta ou diminue de* n *unidades.*

b) *Somando ou diminuindo* n *unidades ao conseqüente, a razão aritmética diminue ou aumenta de* n *unidades.*

c) *Somando ou diminuindo* n *unidades a ambos os têrmos de uma razão aritmética, o valor desta não se altera.*

55. Razão geométrica. Desde que a razão geométrica é o quociente indicado de dois números, conclue-se que

o antecedente é um dividendo e o conseqüente é um divisor. Por exemplo, considerando a razão geométrica 12 : 5, o antecedente 12 é um dividendo, o conseqüente 5 é um divisor, e o valor da razão geométrica, 12 : 5, é o quociente exato da divisão de 12 por 5. E lembrando que o quociente exato da divisão de 12 por 5 é a fração $\frac{12}{5}$, podemos concluir que todas as propriedades das frações se aplicam, sem restrições, às razões geométricas. Por exemplo:

a) *Multiplicando ou dividindo o antecedente por um número qualquer* **n**, *a razão geométrica fica multiplicada ou dividida por* **n**.

b) *Multiplicando ou dividindo o conseqüente por um número qualquer* **n**, *a razão geométrica fica dividida ou multiplicada por* **n**.

c) *Multiplicando ou dividindo por um mesmo número ambos os têrmos de uma razão geométrica, o valor desta não se altere.*

56. Inteirar os têrmos de uma razão geométrica. A terceira propriedade das razões geométricas (§ 55) é importante porque ela nos permite simplificar uma razão cujos têrmos são fracionários, *sem que o valor da razão se altere*.

Primeiro exemplo. Simplificar a razão $4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$.

Transformando os dois têrmos da razão, em frações impróprias, resulta $\frac{13}{3} : \frac{17}{5}$.

Multiplicando os dois têrmos da razão por 15, m.m.c. dos denominadores, resulta $\frac{13 \times 15}{3} : \frac{17 \times 15}{5}$.

E simplificando os dois têrmos desta razão, teremos:

$$13 \times 5 : 15 \times 3 \;\therefore\; 65 : 51$$

Portanto, a razão $4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5}$ é igual à razão 65 : 51.

Segundo exemplo. Simplificar a razão 0,5 : 0,25.

Multiplicando ambos os têrmos desta razão por 100, resulta 50 : 25. E dividindo ambos os têrmos desta última razão por 25, resulta 2 : 1.

Portanto, a razão 0,5 : 0,25 é igual à razão 2 : 1.

Terceiro exemplo. Simplificar a razão $7\frac{1}{2} : 0{,}36$.

Transformando o antecedente em fração imprópria e o conseqüente em fração ordinária, teremos:

$$7\,\frac{1}{2} : 0{,}36 = \frac{15}{2} : \frac{36}{100} = \frac{15}{2} : \frac{9}{25}$$

Multiplicando os dois têrmos desta razão por 50, m.m.c. dos denominadores, teremos:

$$\frac{15 \times 50}{2} : \frac{9 \times 50}{25} = 15 \times 25 : 9 \times 2 = 375 : 18 = 125 : 6$$

Portanto, a razão $7\,\frac{1}{2} : 0{,}36$ é igual à razão $125 : 6$.

A disposição prática dêstes exercícios pode ser a seguinte:

		$7\,\frac{1}{2} : 0{,}36 =$
$4\frac{1}{3} : 3\frac{2}{5} =$	$0{,}5 : 0{,}25 =$	$\frac{15}{2} : \frac{36}{100} =$
$\frac{13}{3} : \frac{17}{5} =$	$50 : 25 =$	$\frac{15}{2} : \frac{9}{25} =$
$65 : 51$	$2 : 1$	$375 : 18 =$
		$125 : 6$

Exercícios orais

Observação. Damos nesta série de exercícios orais, numerosos exemplos em que os números são substituídos por letras, para que os estudantes se habituem paulatinamente ao cálculo literal.

Inteirar os têrmos das seguintes razões:

1. $5 : \frac{1}{2}$	**5.** $a : \frac{b}{c}$	**9.** $2a : \frac{1}{3}$	**13.** $\frac{2a}{b} : c$
2. $\frac{2}{3} : 4$	**6.** $\frac{m}{n} : a$	**10.** $\frac{a}{b} : 2m$	**14.** $m : \frac{3}{5a}$
3. $\frac{1}{2} : \frac{5}{2}$	**7.** $\frac{a}{b} : \frac{c}{b}$	**11.** $x : \frac{3y}{1}$	**15.** $0{,}3 : 1{,}2$
4. $5 : \frac{2}{3}$	**8.** $\frac{a}{b} : \frac{n}{m}$	**12.** $1\frac{1}{2} : 5$	**16.** $4 : 0{,}8$

Exercícios. Série XIX

Reduzir a números inteiros os têrmos das razões seguintes:

1. $5\frac{1}{4} : 25$	**4.** $\frac{9}{10} : \frac{18}{50}$	**7.** $3{,}6 : \frac{24}{25}$
2. $0{,}4 : 0{,}025$	**5.** $5\frac{1}{2} : \frac{33}{40}$	**8.** $3{,}6 : 0{,}45$
3. $8\frac{1}{2} : \frac{35}{36}$	**6.** $\frac{11}{45} : \frac{22}{27}$	**9.** $2{,}6 : 0{,}39$

10. $0{,}333\ldots\ldots : 0{,}444\ldots\ldots$ **12.** $3{,}222\ldots\ldots : 1{,}333\ldots\ldots$ ....

11. $\left(\frac{3}{5} \text{ de } 4\right) : \left(\frac{1}{2} + 3\right)$ **13.** $\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}\right) : \left(3 - \frac{1}{2}\right)$

57. Eqüidiferenças. Consideremos as duas razões aritméticas $15 - 11$ e $13 - 9$. Sendo iguais, podemos escrever:

$$15 - 11 = 13 - 9$$

Esta igualdade recebe, em Matemática, o nome de *eqüidiferença.*

Eqüidiferença é a igualdade entre duas razões aritméticas.

Uma eqüidiferença pode ser escrita de dois modos diferentes:

$$15 - 11 = 13 - 9 \qquad\qquad 15\ .\ 11\ :\ 3\ .\ 9$$

No primeiro caso leremos: 15 *menos* 11 *é igual a* 13 *menos* 9.

No segundo caso leremos: 15 *está para* 11 *assim como* 13 *está para* 9.

Os quatro números que constituem uma eqüidiferença são chamados *têrmos* da eqüidiferença. O primeiro e o terceiro são os *antecedentes*, o segundo e o quarto são os *conseqüentes*; o primeiro e o quarto são chamados *extremos*, o segundo e o terceiro são chamados *meios*; o primeiro e o segundo constituem *a primeira razão*, o terceiro e o quarto constituem a *segunda razão*.

Eqüidiferença contínua é aquela cujos meios são iguais. Por exemplo, as eqüidiferenças $15\ .\ 11\ :\ 11\ .\ 7$ e $a\ .\ m\ :\ m\ .\ b$ são eqüidiferenças contínuas porque os meios são iguais. A cada um dos meios de uma eqüidiferença contínua dá-se o nome de *meio aritmético* ou *meio diferencial* ou vulgarmente **média aritmética.**

Exercícios em classe

1. Escrever duas eqüidiferenças cuja primeira razão seja 12.5.
2. Escrever duas eqüidiferenças cuja segunda razão seja $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$.
3. Escrever uma eqüidiferença cujos antecedentes sejam 0,3 e 0,24.
4. Escrever uma eqüidiferença cujos conseqüentes sejam $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{9}$.
5. Escrever uma eqüidiferença contínua cujo meio seja $\frac{3}{4}$.
6. Verificar se 0,48.0,36 : 0,75.0,63 é realmente uma eqüidiferença.
7. Verificar se $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} : \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{24}$ é realmente uma eqüidiferença.
8. Qual é a condição necessária e suficiente para que quatro números *a, b, c, d,* formem uma eqüidiferença?

58. Proporções. Consideremos as duas razões geométricas 24 ÷ 8 e 15 ÷ 5. Sendo iguais, podemos escrever:

$$24 \div 8 = 15 \div 5$$

Esta igualdade recebe, em Matemática, o nome de *proporção.*

Proporção é a igualdade entre duas razões geométricas.

Uma proporção pode ser escrita de dois modos diferentes:

$$\frac{24}{8} = \frac{15}{5} \qquad 24 : 8 :: 15 : 5$$

No primeiro caso leremos: 24 *dividido por* 8 *é igual a* 15 *dividido por* 5 ou 24 *sôbre* 8 *é igual a* 15 *sôbre* 5.

No segundo caso leremos: 24 *está para* 8 *assim como* 15 *está para* 5.

Os quatro números que constituem uma proporção são chamados *têrmos* da proporção. O primeiro e o terceiro são os *antecedentes,* o segundo e o quarto são os *conseqüentes;* o primeiro e o quarto são chamados *extremos,* o segundo e o terceiro são chamados *meios;* o primeiro e o segundo constituem a *primeira razão;* o terceiro e o quarto constituem a *segunda razão.*

Proporção contínua é aquela cujos meios são iguais. Por exemplo, as proporções 36 : 12 :: 12 : 4 e $a : m :: m : b$, são proporções contínuas porque os meios são iguais. A cada um dos meios de uma proporção contínua dá-se o nome de *meio geométrico* ou *meio proporcional* ou vulgarmente **média geométrica.**

Chama-se **quarta proporcional** *de três números dados em uma certa ordem, um quarto número que forma com os três números dados, uma proporção.*

Assim, dados os três números a, b e c, e chamando x à quarta proporcional, devemos ter:

$$a : b :: c : x$$

Chama-se **terceira proporcional** *de dois números dados em uma certa ordem, um terceiro número que forma com os dois números dados uma proporção contínua, na qual o primeiro dos números dados é o primeiro extremo, e os dois meios são iguais ao segundo número dado.*

Assim, dados os dois números a e b, e chamando x à terceira proporcional, devemos ter:

$$a : b :: b : x$$

Exercícios em classe

1. Escrever duas proporções cuja primeira razão seja $8 : 2$.

2. Escrever duas proporções cuja segunda razão seja $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$.

3. Escrever uma proporção cujos antecedentes sejam 0,4 e 0,9.

4. Escrever uma proporção cujos conseqüentes sejam $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$.

5. Escrever uma proporção contínua cujo meio seja $\frac{2}{5}$.

6. Verificar se $0{,}33 : 0{,}03 :: 297 : 27$ é realmente uma proporção.

7. Verificar se $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} :: \frac{3}{5} : \frac{5}{9}$ é realmente uma proporção.

8. Qual é a condição necessária e suficiente para que quatro números a, b, c, d, formem uma proporção?

Fim

59. Proposições; teoremas e axiomas. (*) *Proposição é o enunciado de um juízo qualquer.* Por exemplo:

I. *O homem é um ser mortal.*

II. *Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.*

(*) Neste parágrafo e nos seguintes (60, 61 e 62) tomámos a liberdade de entrar com alguns ensaios sôbre o método dedutivo, que será largamente empregado na terceira série ginasial. Repetimos mais uma vez que **é preciso semear para colhêr.**

III. *Sendo* $x = y$, *então* $x + a = y + a$, $x - a = y - a$, $xa = ya$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$.

IV. *Se quatro números formam uma eqüidiferença, a soma dos extremos é igual à soma dos meios.*

V. *Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

Em Matemática há duas espécies de proposições: **axiomas** e **teoremas.**

Axioma *é a proposição evidente por si mesma*, isto é, que dispensa prova; as proposições I, II e III são *axiomas.*

Teorema *é a proporção não evidente por si mesma* e que, portanto, exige prova; as proposições IV e V são *teoremas.*

Um teorema se divide sempre em duas partes: *hipótese* e *tese.* A hipótese é a suposição, é o ponto de partida; a tese é a conclusão a que se quer chegar; é aquilo que se pretende provar. Consideremos a proposição IV; é um teorema porque exige prova; nós não aceitamos esta verdade da Matemática, sem a prova necessária. Neste teorema a hipótese, isto é, a suposição, o ponto de partida, é que quatro números quaisquer a, b, c, d, formam uma eqüidiferença, isto é, $a \, . \, b : c \, . \, d$; a tese, isto é, aquilo que nós exigimos que seja provado é que $a + d = b + c$.

Teorema recíproco de um teorema dado ou, simplesmente, **recíproca de um teorema dado,** *é o teorema que se obtém quando se toma a tese do teorema dado, como hipótese, e a hipótese como tese.* Assim, em relação à proposição IV, a recíproca é a seguinte:

Se a soma de dois números é igual à soma de outros dois, êstes quatro números formam uma eqüidiferença, colocando as parcelas de uma das somas nos extremos e as parcelas da outra nos meios.

A demonstração de um teorema é o trabalho intelectual necessário para provar o que nele se afirma. Há em Matemática milhares de teoremas. Entretanto, poucos são os métodos necessários para demonstrá-los. Entre os mais empregados citaremos, por enquanto, os seguintes:

I. *Demonstração direta.*

II. *Demonstração por absurdo.*

O primeiro método consiste em tomar a hipótese e, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas já demonstrados, deduzir dela a tese ou conclusão a que queremos chegar.

O segundo método consiste em negar a tese e verificar que a cada negação da tese corresponde um absurdo, isto é, uma negação da hipótese. Ora, se a negação da tese nos conduz a um absurdo, forçoso é aceitá-la.

No decorrer dêste curso elementar de Matemática, encontraremos numerosos exemplos dêstes dois métodos de demonstração.

60. Teorema fundamental das eqüidiferenças. *Se quatro números formam uma eqüidiferença, a soma dos extremos é igual à soma dos meios.* (*)

H. $\{ a . b : c . d$ T. $\{ a + d = b + c$

A nossa hipótese ou suposição é que os números a, b, c e d formam uma eqüidiferença, isto é,

$$a . b : c . d$$

Lembrando a definição de uma eqüidiferença (§ 57), podemos escrever:

$$a - b = c - d$$

Somando $b + d$ a ambos os membros desta igualdade, as duas somas ainda serão iguais; portanto,

$$a - b + b + d = c - d + b + d \quad \therefore$$
$$a + d + b - b = c + b + d - d$$

Axioma. *Somando a mesma quantidade a ambos os membros de uma igualdade, as duas somas formarão ainda uma igualdade.*

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$A + M = B + M$$

E observando que $b - b = 0$ e $d - d = 0$ teremos:

$$a + d = b + c \qquad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Reparem bem os estudantes que, para demonstrar êste teorema, tomámos a hipótese, lembrámos a definição de uma eqüidiferença, aplicámos à igualdade resultante o axioma da adição, suprimimos as dife-

(*) Esta demonstração e as seguintes podem ser feitas com números, se assim for mais conveniente. Aliás, parece-nos útil dar primeiramente uma demonstração numérica, antes da literal.

renças $b - b$ e $d - d$, e chegámos assim à tese. O método empregado na demonstração dêste teorema foi o direto.

Queremos verificar se $a \,.\, b : c \,.\, d$ é realmente uma eqüidiferença. Podemos fazê-lo de duas maneiras distintas:

a) verificando se $a - b = c - d$.
b) verificando se $a + d = b + c$.

Por exemplo, $17 \,.\, 12 : 13 \,.\, 8$ é realmente uma eqüidiferença porque $17 - 12 = 13 - 8$ ou porque $17 + 8 = 12 + 13$; $10 \,.\, 7 : 11 \,.\, 5$ não é uma eqüidiferença porque $10 - 7 \neq 11 - 5$, ou porque $10 + 5 \neq 7 + 11$.

Logo, não podemos escrever $10 \,.\, 7 : 11 \,.\, 5$.

Observação. O sinal $\neq$ significa *diferente de.*

Teorema recíproco. *Sendo a soma de dois números igual à soma de outros dois, êstes quatro números formam uma eqüidiferença, colocando as parcelas de uma soma nos extremos (ou nos meios) e as parcelas da outra nos meios (ou nos extremos).*

H. $\{\; m + n = r + s$ T. $\{\; m \,.\, r : s \,.\, n$

Tomando a hipótese e subtraindo $n + r$ de ambos os membros desta igualdade, os dois restos serão iguais; portanto,

$$m + n - n - r = r + s - n - r \quad \therefore$$
$$m - r = s - n$$

Esta igualdade é uma eqüidiferença (§57); logo,

$m \,.\, r : s \,.\, n$ C. Q. D.

> **Axioma.** *Diminuindo a mesma quantidade de ambos os membros de uma igualdade, os dois restos formarão ainda uma igualdade.*
>
> Por exemplo, se tivermos
>
> A = B
>
> teremos também
>
> A − M = B − M

Corolário I. *Alternando, invertendo ou transpondo os têrmos de uma eqüidiferença, êles constituem sempre uma eqüidiferença.*

Alternar é mudar a posição dos meios ou dos extremos; *inverter* é colocar os meios no lugar dos extremos; *transpor* é mudar a posição das razões.

Assim, dada a eqüidiferença $a \,.\, b : c \,.\, d$

alternar é escrever $a \,.\, c : b \,.\, d$
inverter é escrever $b \,.\, a : d : c$
transpor é escrever $c \,.\, d : a \,.\, b$

Vamos provar que estas transformações podem ser feitas, continuando os quatro números a formar uma eqüidiferença.

Consideremos a equidiferença

$$m \,.\, n : r \,.\, s \tag{A}$$

De acôrdo com o teorema fundamental, temos: $m+s=n+r$.

Alternando, isto é, mudando a posição dos meios ou a dos extremos, teremos:

$$m \,.\, r : n \,.\, s \quad \text{(B)} \qquad\qquad s \,.\, n : r \,.\, m \quad \text{(C)}$$

Quer na expressão B, quer na expressão C, a soma dos extremos é $m + s$, e a soma dos meios é $n + r$. E estas duas somas sendo iguais, por hipótese, as expressões B e C são realmente eqüidiferenças.

Voltando à eqüidiferença A, e invertendo, isto é, colocando os meios no lugar dos extremos, teremos:

$$n \,.\, m : s \,.\, r \tag{D}$$

E sendo a soma dos meios, $m + s$, igual à soma dos extremos, $r + n$, por hipótese, a expressão D é realmente uma eqüidiferença.

Voltando à eqüidiferença A e transpondo, isto é, mudando a posição das razões, teremos:

$$r \,.\, s : m \,.\, n \tag{E}$$

Ora, a expressão E é evidentemente uma eqüidiferença, porque, sendo $m-n = r-s$, por hipótese, é claro que $r-s = m-n$.

Êste corolário nos permite escrever uma eqüidiferença, de oito modos diferentes.

Seja a eqüidiferença $a \,.\, b : m \,.\, n$.

Em primeiro lugar temos	$a \,.\, b : m \,.\, n$	(1)
Alternando	$a \,.\, m : b \,.\, n$	(2)
Invertendo os têrmos da primeira .	$b \,.\, a : n \,.\, m$	(3)
Alternando	$b \,.\, n : a \,.\, m$	(4)
Transpondo os têrmos da primeira .	$m \,.\, n : a \,.\, b$	(5)
Alternando	$m \,.\, a : n \,.\, b$	(6)
Alternando os têrmos da primeira .	$n \,.\, b : m \,.\, a$	(7)
Alternando	$n \,.\, m : b \,.\, a$	(8)

Corolário II. *Um extremo qualquer de um eqüidiferença é à soma dos meios menos o outro extremo.*

$$\text{H.} \left\{ a \,.\, b : c \,.\, d \right. \qquad \text{T.} \left\{ a = b + c - d \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das eqüidiferenças, teremos :

$$a + d = b + c$$

Diminuindo d de ambos os membros desta igualdade, resulta :

$$a + d - d = b + c - d \;\therefore$$

$$a = b + c - d \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário III. *Um meio qualquer de uma eqüidiferença é igual à soma dos extremos menos o outro meio.*

$$\text{H.} \left\{ m \,.\, n : r \,.\, s \right. \qquad \text{T.} \left\{ m = n + s - r \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das eqüidiferenças, teremos :

$$n + r = m + s$$

Diminuindo r de ambos os membros desta igualdade, resulta :

$$n + r - r = m + s - r \;\therefore$$

$$n = m + s - r \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário IV. *A média aritmética de dois números é igual à semissoma dêstes mesmos números.*

H. $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ é a média aritmética} \\ \text{dos números } a \text{ e } b. \end{array} \right.$ T. $\left\{ m = \dfrac{a+b}{2} \right.$

Sendo m a média aritmética dos números a e b, segue-se que êstes três números formam uma eqüidiferença contínua na qual m é o meio. Portanto,

$$a \, . \, m : m \, . \, b$$

Aplicando a esta eqüidiferença a propriedade fundamental das eqüidiferenças, teremos :

$$2m = a + b$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por 2, resulta

$$m = \frac{a+b}{2} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Por analogia, a média aritmética de n números é a soma dêstes números, dividida por n. A média aritmética dos números 7, 8 e 9 é $(7 + 8 + 9) \div 3$; dos números 5, 6, 11 e 14 é $(5 + 6 + 11 + 14) \div 4$; etc..

Corolário V. *Somando ou diminuindo o mesmo número a um extremo e a um meio de uma eqüidiferença, esta continua a existir.*

H. $\{ \; a \, . \, b : c \, . \, d$ T. $\{ \; (a + m) \, . \, b : (c + m) \, . \, d$

De acôrdo com a hipótese, temos :

$$a - b = c - d$$

Somando m a ambos os membros desta igualdade, teremos :

$$a - b + m = c - d + m$$

Mudando a ordem dos têrmos de ambos os membros desta igualdade, o que é permitido, *contanto que cada têrmo conserve o o seu sinal*, teremos :

$$a + m - b = c + m - d$$

Pondo entre parênteses os dois primeiros têrmos de cada um dos membros desta igualdade, resulta:

$$(a + m) - b = (c + m) - d$$

Esta igualdade, sendo constituída por duas diferenças, é uma equidiferença (§ 57); logo,

$$(a + m) \;.\; b \;:\; (c + m) \;.\; d \qquad \text{C. Q. D.}$$

De modo análogo provaríamos que:

$$(a - m) \;.\; b \;:\; (c - m) \;.\; d$$

Êste corolário pode ser enunciado do seguinte modo:

Se quatro números formam uma eqüidiferença, somando ou diminuindo o mesmo número aos antecedentes ou aos conseqüentes ou a ambos os têrmos de uma mesma razão, a eqüidiferença continua a existir.

Exercícios. Série XX

Determinar o valor de x nas eqüidiferenças seguintes:

1. $\frac{3}{4} \,.\, \frac{2}{9} : \frac{7}{8} \,.\, x$

2. $5\frac{1}{2} \,.\, \frac{9}{10} : x \,.\, 7\frac{2}{3}$

3. $4{,}2 \,.\, 3{,}7 : 15 \,.\, x$

4. $8{,}4 \,.\, x : 9{,}3 \,.\, 7{,}28$

5. $0{,}333\ldots\ldots \,.\, 0{,}0222\ldots\ldots : 2\frac{3}{4} \,.\, x$

6. $\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{8} \,.\, x : 0{,}936 \,.\, 0{,}2111\ldots\ldots$

7. Calcular a média aritmética de $7\frac{1}{2}$ e $11\frac{3}{4}$.

8. Calcular a média aritmética de 0,25 e 3,789.

9. Qual a média aritmética de $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{7}$?

10. Determinar a média aritmética de $\frac{9}{10}$, $\frac{4}{25}$ e 0,13.

11. Determinar a média aritmética de 0,444...... e 3,0222......

12. Determinar a média aritmética de $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{5}$ e 2,25.

61. Teorema fundamental das proporções. *Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

$$\text{H.} \; \{ \; a : b :: c : d \qquad\qquad \text{T.} \; \{ \; ad = bc$$

A nossa hipótese é que os números a, b, c e d formam uma proporção, isto é,

$$a : b :: c : d$$

Lembrando a definição de uma proporção (§ 58) podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por bd, os dois produtos ainda serão iguais; portanto,

$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$$

E, simplificando as duas frações,

$$ad = bc$$

C. Q. D.

> **Axioma.** *Multiplicando ambos os membros de uma igualdade por uma mesma quantidade, os dois produtos formarão ainda uma igualdade.*
>
> Por exemplo, se tivermos
>
> $$A = B$$
>
> teremos também
>
> $$AM = BM$$

Observação. Reparem bem os estudantes que, para demonstrar êste teorema, tomámos a hipótese, lembrámos a definição de uma proporção, aplicámos à igualdade resultante o axioma da multiplicação, simplificámos as frações resultantes e chegámos assim à tese. Portanto, êste teorema foi demonstrado de um modo direto.

Queremos verificar se $a : b :: c : d$ é realmente uma proporção. Podemos fazê-lo de duas maneiras distintas:

a) *verificando se* $a \div b = c \div d$

b) *verificando se* $a \times d = b \times c$

Por exemplo, $15 : 5 :: 12 : 4$ é realmente uma proporção porque $15 \div 5 = 12 \div 4$ ou porque $15 \times 4 = 5 \times 12$; $15 : 5 :: 10 : 2$ não é uma proporção porque $15 \div 5 \neq 10 \div 2$ ou porque $15 \times 2 \neq 5 \times 10$ e, portanto, não podemos escrever $15 : 5 :: 10 : 2$.

Teorema recíproco. *Sendo o produto de dois números igual ao produto de outros dois, êstes quatro números formam uma proporção, colocando os fatores de um produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do outro nos meios (ou nos extremos).*

H. $\{ \; mn = rs$ T. $\{ \; m : r :: s : n$

Tomando a hipótese e dividindo ambos os membros desta igualdade por nr, os dois quocientes serão iguais; portanto.

$$\frac{mn}{nr} = \frac{rs}{nr}$$

Simplificando as duas frações, resulta:

$$\frac{m}{r} = \frac{s}{n}$$

Esta igualdade é uma proporção (§ 58); logo,

$$m : r :: s : n \qquad \text{C. Q. D.}$$

Axioma. *Dividindo ambos os membros de uma igualdade por uma mesma quantidade,* **diferente de zero.** *os dois quocientes formarão ainda uma igualdade.*

Por exemplo, se tivermos

$$A = B$$

teremos também

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{M}$$

Corolário I. *Alternando, invertendo ou transpondo os têrmos de uma proporção, êles constituem sempre uma proporção.*

Observação. *Alternar, inverter* ou *transpor* os têrmos de uma proporção é o mesmo que alternar, inverter ou transpor os têrmos de uma eqüidiferença.

Consideremos a proporção

$$a : b :: m : n \qquad \text{(A)}$$

De acôrdo com o teorema fundamental, temos: $an = bm$. Alternando, isto é, mudando a posição dos meios ou dos extremos, resulta:

$$a : m :: b : n \quad \text{(B)} \qquad n : b :: m : a \quad \text{(C)}$$

Quer na expressão B, quer na expressão C, o produto dos extremos é an, e o produto dos meios é bm. E êstes dois produtos sendo iguais, por hipótese, as expressões B e C são realmente proporções.

Voltando à proporção A e invertendo, isto é, colocando os meios no lugar dos extremos, teremos:

$$b : a :: n : m \qquad \text{(D)}$$

E sendo o produto dos extremos, bm, igual ao produto dos meios, an, a expressão D é realmente uma proporção.

Voltando à proporção A, e transpondo, isto é, mudando a posição das razões, teremos:

$$m : n :: a : b \qquad \text{(E)}$$

Ora, a expressão E é realmente uma proporção porque, sendo $a \div m = m \div n$, por hipótese, é claro que $m \div n = a \div b$.

Êste corolário nos permite escrever uma proporção de oito modos diferentes.

Seja a proporção $a : b :: c : d$.

Em primeiro lugar	$a : b :: c : d$	(1)
Alternando	$a : c :: b : d$	(2)
Invertendo os têrmos da primeira .	$b : a :: d : c$	(3)
Altèrnando	$b : d :: a : c$	(4)
Transpondo os têrmos da primeira .	$c : d :: a : b$	(5)
Alternando	$c : a :: d : b$	(6)
Alternando os têrmos da primeira .	$d : b :: c : a$	(7)
Alternando	$d : c :: b : a$	(8)

Corolário II. *Um extremo qualquer de uma proporção é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.*

$$\text{H.} \; \{ \; a : b :: c : d \qquad \text{T.} \; \left\{ \; a = \frac{bc}{d} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$ad = bc$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por d, resulta:

$$a = \frac{bc}{d} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário III. *Um meio qualquer de uma proporção é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.*

$$\text{H.} \; \{ \; m : n :: r : s \qquad \text{T.} \; \left\{ \; n = \frac{ms}{r} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando-lhe o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$nr = ms$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por r, resulta:

$$n = \frac{ms}{r} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário IV. *A média geométrica de dois números é igual à raiz quadrada do produto dêstes mesmos números.*

$$\text{H.} \left\{ \begin{array}{l} m \text{ é a média geométrica} \\ \text{dos números } a \text{ e } b. \end{array} \right. \qquad \text{T.} \left\{ m = \sqrt{ab} \right.$$

Sendo m a média geométrica dos números a e b, segue-se que êstes três números formam uma proporção contínua na qual m é o meio. Portanto,

$$a : m :: m : b$$

Aplicando a esta proporção o teorema fundamental das proporções, teremos:

$$m^2 = ab$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros desta igualdade, resulta:

$$m = \sqrt{ab} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Corolário V. *Multiplicando ou dividindo um extremo e um meio de uma proporção por um mesmo número, a proporção continua a existir.*

$$\text{H.} \left\{ a : b :: c : d \right. \qquad \text{T.} \left\{ \begin{array}{l} am : b :: cm : d \\ \dfrac{a}{m} : b :: \dfrac{c}{m} : d \end{array} \right.$$

De acôrdo com a hipótese, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando e dividindo ambos os membros desta igualdade por m, resulta:

$$\frac{a}{b} \times m = \frac{c}{d} \times m \;\therefore \qquad \frac{a}{b} \div m = \frac{c}{d} \div m \;\therefore$$

$$\frac{a\,m}{b} = \frac{cm}{d} \;\therefore \qquad \frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d} \;\therefore$$

$$am : b :: cm : d \qquad \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d$$

C. Q. D. — C. Q. D.

Êste corolário pode ser enunciado do seguinte modo:

Se quatro números formam uma proporção, multiplicando ou dividindo os antecedentes ou os conseqüentes ou ambos os têrmos de uma das razões, por um mesmo número, a proporção continua a existir.

Exercícios. Série XXI

1. Um retângulo tem 25m de comprimento e 15m de largura. Qual é a razão de suas dimensões?

2. Sabendo que $\frac{5}{3} : \frac{4}{9} :: \frac{2}{3} : x$, calcular x.

3. Calcular x na proporção $3{,}2 : 3{,}5 :: 9{,}6 : x$.

4. Escrever uma proporção cujos têrmos sejam 5,2 - 3,2 - 12,8 - 1,3.

5. Idem, com os números 407, 53, 583 e 37.

6. E' dada a igualdade $34 \times 175 = 238 \times 25$. Deduzir desta igualdade uma proporção e escrever esta de todos os modos possíveis.

7. Qual é a razão entre 12 dias e 4 meses?

8. Misturam-se 0,6 litros de água com 3 litros de vinho. Qual a razão entre a água e o vinho? Entre a água e a mistura? Entre o vinho e a mistura?

9. Calcular x na proporção $3\frac{1}{2} : \frac{9}{10} :: x : 7\frac{1}{4}$.

10. Idem na proporção $\sqrt{0{,}25} : \sqrt{0{,}36} :: 1{,}2 : x$.

11. Idem, na proporção $9{,}1 : 8{,}3 :: x : 33{,}2$.

12. Simplificar os têrmos da proporção $10 : 21 :: 20 : 42$.

13. E' dada a proporção $9{,}1 : 2{,}6 : 0{,}56 :: 0{,}16$. Transformar seus têrmos em números inteiros e, em seguida, simplificar.

14. Inteirar os têrmos da proporção $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} :: x : \frac{9}{10}$, sem tocar em x.

15. Idem, em relação à proporção $\frac{5}{6} : x :: \frac{7}{12} : \frac{4}{5}$.

16. Calcular x na proporção $105 : x :: x : 420$.

17. Idem, na proporção $1\,925 : x :: x : 77$.

18. Idem, na proporção $13 : x :: x : 6$.

19. Idem, na proporção $20 : x :: x : 30$.

20. A razão calculada de dois números é 1,2. Sendo 5,28 o antecedente, qual é o conseqüente?

21. A razão calculada de dois números é 2,5. Sendo 1,75 o conseqüente, qual é o antecedente?

22. A razão entre a capacidade de um copo e a de uma garrafa é $\frac{1}{4}$. Se a capacidade do copo é de 0,24 litros, qual é a da garrafa?

23. Calcular x na proporção $0{,}444\ldots : 0{,}0222\ldots :: 4\frac{1}{5} : x$.

24. Idem, na proporção $\frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2} : x :: 0{,}2111\ldots : \frac{1}{5}$.

25. Idem, na proporção $\dfrac{\frac{5}{3}}{4} : x :: \dfrac{\frac{2}{3}}{5} : \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}}$

26. Calcular a média geométrica de 0,423 e 3,6 a menos de 0,001.

27. Calcular a média geométrica de $7\frac{1}{2}$ e $3\frac{2}{5}$ a menos de 0,001.

28. Calcular a média geométrica de $\frac{9}{10}$ e 0,444.... a menos de 0,001.

29. O produto dos quatro têrmos de uma proporção contínua é 1 296 e o último têrmo é a têrça parte da soma dos meios. Determinar os quatro têrmos.

Solução. Seja $a : m :: m : b$ a proporção pedida. De acôrdo com o problema proposto, temos:

$$a \times m \times m \times b = 1296 \qquad b = \frac{2m}{3}$$

Sendo $a \times m \times m \times b = 1296$, teremos:

$$a \times m \times m \times b = 1296 \quad \therefore \quad m^2 \times ab = 1296$$

Mas $ab = m^2$ (teorema fundamental das proporções); logo,

$$m^2 \times m^2 = 1296 \quad \therefore \quad m^2 = \sqrt{1296} \quad \therefore \quad m^2 = 36 \quad \therefore \quad m = 6$$

E sendo $m = 6$, resulta que $b = \frac{2m}{3} \quad \therefore \quad b = 4$

E teremos :

$$a : 6 :: 6 : 4 \;\therefore\; a = \frac{6 \times 6}{4} = 9$$

Resposta. A proporção pedida é $9 : 6 :: 6 : 4$.

30. Determinar os quatro têrmos de uma proporção contínua, sabendo que o produto dos quatro têrmos é 20 736 e que o primeiro têrmo é o quádruplo de um dos meios.

31. Determinar os quatro têrmos de uma proporção contínua, sabendo que o produto dos quatro têrmos é 810 000 e que o primeiro contém 36 vêzes o quarto.

32. Dada a proporção $35 : 2x : 76 : 4$, calcular x.

Observação. Calcular primeiramente $2x$.

33. Qual é o valor de x na proporção $3x : \frac{1}{2} :: \frac{2}{3} : \frac{2}{5}$?

34. Calcular x na proporção $0{,}4 : \frac{3}{8} :: 5\frac{1}{2} : 4x$.

35. Idem, na proporção $\frac{6}{11} : \frac{7}{22} :: 5x : 0{,}033\,3\ldots$

36. Sabendo que $a : b :: c : d$, provar que $ma : nb :: mc : nd$.

62. Propriedades das proporções. As proporções têm numerosas propriedades cujo conhecimento é indispensável pela sua larga aplicação num curso de Matemática.

Primeira propriedade. *Em uma proporção, a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois primeiros têrmos está para o* **segundo,** *assim como a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois últimos está para o* **quarto.**

Dividiremos a demonstração desta propriedade em três partes. (*)

Primeira parte. *Em uma proporção, a* **soma** *dos dois primeiros termos está para o* **segundo,** *assim como a* **soma,** *dos dois últimos está para o* **quarto.**

$$\text{H.} \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \,(^{**}) \right. \qquad \text{T.} \left\{ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \right.$$

(*) Assim tenho feito há muitos anos com os meus alunos, com excelentes resultados. E, esta propriedade estando bem sabida e compreendida, o conhecimento das seguintes torna-se extremamente fácil para os estudantes.

(**) Nestas demonstrações escreveremos uma proporção sob esta forma.

Tomando a hipótese e somando a unidade a ambos os membros, teremos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

Substituindo a unidade do 1.º membro por $\frac{b}{b}$ e a do 2.ª por $\frac{d}{d}$, resulta:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

Em lugar de 1, podemos escrever $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{b}{b}$, $\frac{d}{d}$, $\frac{x}{x}$, etc..

Qualquer uma destas frações aparentes é igual à unidade.

E, efetuando as adições indicadas, teremos:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

C. Q. D.

Segunda parte. *Em uma proporção, a* **diferença** *dos dois primeiros têrmos está para o* **segundo,** *assim como a* **diferença** *dos dois últimos está para o* **quarto.**

H. $\left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$ T. $\left\{ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \right.$

Demonstração. E' bastante repetir a demonstração da 1.ª parte, substituindo o sinal + pelo sinal —, e a operação de somar pela operação de diminuir.

Terceira parte. *Em uma proporção, a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois primeiros termos está para o* **segundo,** *assim como a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois últimos está para o* **quarto.**

H. $\left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$ T. $\left\{ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \right.$

Demonstração. E' bastante repetir a demonstração da 1.ª parte, substituindo a palavra *somando* pela frase *somando e subtraindo*; o sinal + pelo sinal ± (*mais ou menos*); a palavra *adições* pela frase *adições e subtrações.*

Corolário I. *Em uma proporção, a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois primeiros têrmos está para o* **primeiro,** *assim como a* **soma** *ou* **diferença** *dos dois últimos está para o* **terceiro.**

H. $\left\{ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \right.$ T. $\left\{ \dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c} \right.$

Em primeiro lugar, tomando a hipótese e alternando seus têrmos, teremos: (§ 61)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \text{(A)}$$

Isto feito, voltando à hipótese e aplicando-lhe a primeira propriedade que acabámos de demonstrar, teremos:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Alternando . . . . . . $\dfrac{a \pm b}{c \pm d} = \dfrac{b}{d}$ (B)

Porém, de acôrdo com a proporção (A) a razão $\dfrac{b}{d}$ é igual à razão $\dfrac{a}{c}$. Substituindo na proporção (B) resulta:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$$

E alternando. . . . . . $\dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c}$

C. Q. D.

Observação. Seja a proporção $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10}$. Aplicando a esta proporção a propriedade demonstrada (segunda parte) teremos: $\dfrac{3-5}{5} = \dfrac{6-10}{10}$. E as operações $3 - 5$ e $6 - 10$ são impossíveis (por ora).

Corolário II. *Em uma proporção, a* **soma** *dos dois primeiros têrmos está para a sua* **diferença,** *assim como a* **soma** *dos dois últimos está para a sua* **diferença.**

H. $\left\{ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \right.$ T. $\left\{ \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d} \right.$

Tomando a hipótese e aplicando a propriedade demonstrada, teremos:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Alternando . . . . . . $\dfrac{a \pm b}{c \pm d} = \dfrac{b}{d}$

Separando as duas proporções . . . . $\begin{cases} \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d} \\ \\ \dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{b}{d} \end{cases}$

> **Axioma.** *Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.*
>
> Por exemplo, se tivermos
>
> $$A = M$$
> $$B = M$$
>
> podemos afirmar que
>
> $$A = B$$

Aplicando o axioma indicado ao lado,

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

E alternando . . . . $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

C. Q. D.

Aplicação I. Dada a proporção $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}$, calcular x e y, sabendo que $x + y = 200$.

Aplicando à proporção dada a propriedade demonstrada, teremos:

$x + y : y :: 3 + 5 : 5 \therefore$	$x + y = 200$	*Resposta.*
$200 : y :: 8 : 5 \therefore$	$x + 125 = 200$	$x = 75$
$y = \dfrac{200 \times 3}{8} = 125$	$x = 200 - 125 = 75$	$y = 125$

Aplicação II. Dada a proporção $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{7}$, calcular x e y, sabendo que $y - x = 80$.

Invertendo os têrmos da proporção dada, e recorrendo à propriedade já demonstrada, teremos:

$y : x :: 7 : 3 \therefore$		
$y - x : x :: 7 - 3 : 3 \therefore$	$y - x = 80$	*Resposta.*
$80 : x :: 4 : 3 \therefore$	$y - 60 = 80$	$x = 60$
$x = \dfrac{80 \times 3}{4} = 60$	$y = 80 + 60 = 140$	$y = 140$

Aplicação III. Dada a proporção $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, calcular x e y, sabendo que $4x + 5y = 99$.

Multiplicando os antecedentes da proporção dada por 4, e os conseqüentes por 5, os quatro produtos continuam a formar proporção. (§ 61, 5.° corolário) E teremos sucessivamente:

$4x : 5y :: 8 : 25 \quad \therefore$

$4x + 5y : 5y :: 8 + 25 : 25 \quad \therefore$

$99 : 5y :: 33 : 25 \quad \therefore$

$$5y = \frac{99 \times 25}{33} = 75 \quad \therefore$$

$y = 15$

$4x + 5y = 99$

$4x + 75 = 99$

$4x = 99 - 75$

$4x = 24$

$x = 6$

Resposta.

$x = 6$

$y = 15$

Exercícios. Série XXII

1. Dada a proporção $24 : 8 :: 15 : 5$ verificar a verdade enunciada na primeira propriedade e seu corolário.

Calcular x e y nas proporções seguintes:

2. $x : y :: 3{,}5 : 2{,}1$	$x + y = 28$
3. $1{,}7 : 1{,}1 :: x : y$	$x + y = 0{,}56$
4. $x : y :: 35 : 0{,}65$	$x + y = 35{,}65$
5. $x : y :: 91 : 299$	$2x + 3y = 166$
6. $23 : 31 :: x : y$	$y - x = 40$
7. $x : y :: 123 : 180$	$3y - 2x = 98$

8. A idade de um pai está para a de seu filho, assim como 11 está para 3. Determinar as duas idades sabendo que sua diferença é de 40 anos.

9. Duas quantias estão entre si, como 7 está para 15; determiná-las sabendo que a diferença entre a segunda e a primeira é de 64 cruzeiros.

10. Os comprimentos de duas peças de fazenda estão entre si como 11 está para 15. A diferença entre o quíntuplo do comprimento da primeira e o triplo do comprimento da segunda é de 40m. Determinar os dois comprimentos.

11. Um terreno cuja área mede 672m², foi dividido em dois quinhões cuja razão é $\frac{7}{15}$. Determinar os dois quinhões.

12. Depositaram-se 11 000 litros de gasolina em dois tanques, os quais ficaram completamente cheios. Determinar a capacidade de cada um dos tanques, sabendo que a razão entre as duas capacidades é $\frac{3}{11}$.

13. Determinar uma fração eqüivalente a $\frac{4}{11}$ e cuja soma dos têrmos seja 120.

14. Determinar uma fração eqüivalente a $\frac{11}{12}$ e cuja diferença dos têrmos seja 25.

15. Determinar dois números sabendo que êles estão entre si como 11 está para 5, e que a diferença de seus quadrados é 3 456.

16. Determinar dois números sabendo que êles estão entre si como 2 está para 5, e que a soma de seus quadrados é 5 684.

Segunda propriedade. *Em uma proporção, a* **soma** *ou* **diferença** *dos antecedentes está para a* **soma** *ou* **diferença** *dos conseqüentes assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente.*

$$\text{H.} \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad \text{T.} \left\{ \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} \right.$$

Tomando a hipótese e alternando seus têrmos, teremos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \text{(A)}$$

Aplicando a primeira propriedade à proporção (A) resulta:

$$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$$

Alternando . . . . $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$

C. Q. D.

Observação. Sendo $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, por hipótese, também podemos escrever:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}$$

Corolário. *Em uma proporção, a* **soma** *dos antecedentes está para a sua* **diferença,** *assim como a* **soma** *dos conseqüentes está para a sua* **diferença**

$$\text{H.} \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right. \qquad \left\{ \frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d} \right.$$

Tomando a hipótese e aplicando a propriedade que acabámos de demonstrar, teremos:

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b}$$

Separando as duas proporções. . $\begin{cases} \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

Aplicando o axioma conhecido . . . $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

Alternando . . . . $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$

C. Q. D.

Aplicação I. Dada a proporção $\frac{x}{8} = \frac{y}{24}$, calcular x e y, sabendo que $x + y = 28$.

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$x + y : 8 + 24 :: \begin{Bmatrix} x : 8 \\ y : 24 \end{Bmatrix} \therefore 28 : 32 :: \begin{Bmatrix} x : 8 \\ y : 24 \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\begin{Bmatrix} 28 : 32 :: x : 8 \\ 28 : 32 :: y : 24 \end{Bmatrix}$$

Destas duas proporções deduzimos fàcilmente o valor de x e o de y.

Aplicação II. Dada a proporção $30 : x : 24 : y$, calcular x e y, sabendo que $x - y = 11$.

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$30 - 24 : x - y :: \begin{Bmatrix} 30 : x \\ 24 : y \end{Bmatrix} \therefore 6 : 11 :: \begin{Bmatrix} 30 : x \\ 24 : y \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\begin{Bmatrix} 6 : 11 :: 30 : x \\ 6 : 11 :: 24 : y \end{Bmatrix}$$

Destas duas proporções deduzimos fàcilmente os valores de x e y.

Aplicação III. Dada a proporção $x : 7 :: y : 20$, calcular x e y, sabendo que $y - x = 10$.

Transpondo os têrmos da proporção dada, teremos $y : 20 :: x : 7$. Aplicando a esta proporção a segunda propriedade, teremos:

$$y - x : 20 - 7 :: \begin{Bmatrix} y : 20 \\ x : 7 \end{Bmatrix} \therefore 10 : 13 :: \begin{Bmatrix} y : 20 \\ x : 7 \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\begin{Bmatrix} 10 : 13 :: y : 20 \\ 10 : 13 :: x : 7 \end{Bmatrix}$$

Estas duas proporções nos dão os valores de x e y.

Aplicação IV. Dada a proporção $x : 15 :: y : 12$, calcular x e y, sabendo que $3x + 5y = 20$.

A proporção dada é $x : 15 :: y : 12$ ou $\frac{x}{15} = \frac{y}{12}$. Estas duas razões não se alteram, se multiplicarmos ambos os têrmos da primeira, por 3, e os da segunda, por 5. Portanto,

$$\frac{3x}{45} = \frac{5y}{60} \therefore \frac{3x + 5y}{45 + 60} = \frac{3x}{45} \quad \text{e} \quad \frac{3x + 5y}{45 + 60} = \frac{5y}{60} \therefore$$

$$\frac{20}{105} = \frac{3x}{45} \quad \text{e} \quad \frac{20}{105} = \frac{5y}{60}$$

$$\frac{4}{21} = \frac{x}{15} \quad \text{e} \quad \frac{4}{21} = \frac{y}{12}$$

Das duas últimas proporções deduzimos os valores de x e y.

Observação. Em relação a estas quatro aplicações, podemos também alternar os têrmos das proporções dadas, e trabalhar com a primeira propriedade.

Exercícios. Série XXIII

Calcular x e y nas proporções seguintes:

1. $x : 3,5 :: y : 2,1$ $\qquad x + y = 28$
2. $x : 1,7 :: y : 1,1$ $\qquad x - y = 3,6$
3. $6 : x :: 2,52 : y$ $\qquad x - y = 2,9$
4. $x : 5 :: y : 7$ $\qquad y - x = 6$
5. $x : 15 :: y : 45$ $\qquad 3x + 5y = 234$
6. $x : 3 :: y : 9$ $\qquad 2y - 4x = 14$

7. Dois números são proporcionais a 13 e 7, e sua diferença é 60. Quais são êstes números?

Observação. Se os dois números pedidos são proporcionais a 13 e 7, escreveremos $x : 13 :: y : 7$.

8. Determinar os antecedentes de uma proporção, sabendo que sua diferença é 77 e que os conseqüentes são 15 e 8.

9. Determinar os antecedentes de uma proporção cujos conseqüentes são 7 e 10, sabendo que a diferença entre 8 vêzes o primeiro antecedente e 5 vêzes o segundo antecedente é 12.

10. Dois números são proporcionais a 7 e 8. Determinar êstes números, sabendo que a diferença entre 7 vêzes o segundo e 5 vêzes o primeiro é 32.

11. Dividir 100 metros de sêda em duas porções proporcionais aos números 3 e 4.

Solução. Representando as duas porções por x e y, teremos $x : 3 :: y : 4$, etc.. Os valores de x e de y serão calculados com êrro inferior a 0,001m.

12. Dois irmãos, cujas idades respectivas são 12 e 10 anos, recebem de seu pai a quantia de 500 cruzeiros, para que a repartam em partes proporcionais às suas idades. Qual será a parte de cada um?

Terceira propriedade. *Se três razões geométricas são iguais, a* **soma** *dos antecedentes está para a* **soma** *dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente.*

$$\text{H.} \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \right. \qquad \text{T.} \left\{ \frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \right.$$

Tomando as duas primeiras razões da hipótese e aplicando-lhes a segunda propriedade, teremos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \qquad \text{(A)}$$

Na proporção (A) substituindo a razão $\frac{a}{b}$ pela razão igual $\frac{m}{n}$, teremos:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{m}{n} \qquad \text{(B)}$$

Aplicando à proporção (B) a segunda propriedade, resulta:

$$\frac{a+c+m}{b+d+n} = \frac{m}{n} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Esta propriedade é verdadeira para três ou mais razões geométricas, como é fácil de demonstrar.

Aplicação. Sendo $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, calcular x, y e z, sabendo que $x + y + z = 60$.

De acôrdo com a terceira propriedade, teremos:

$$x + y + z : 3 + 4 + 5 :: \left\{ \begin{matrix} x:3 \\ y:4 \\ z:5 \end{matrix} \right\} \quad \therefore \quad 60 : 12 :: \left\{ \begin{matrix} x:3 \\ y:4 \\ z:5 \end{matrix} \right\} \quad \therefore$$

$$60 : 12 :: x : 3$$
$$60 : 12 :: y : 4$$
$$60 : 12 :: z : 5$$

Destas três proporções tiramos os valores de x, y e z.

Exercícios. Série XXIV

1. Sendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, demonstrar que $\frac{a+e-c}{b+f-d} = \frac{c}{d}$.

2. Sendo $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ e $x + y + z = 108$, calcular x, y e z.

3. Sendo $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{7}{c} = \frac{8}{d}$, calcular os conseqüentes, sabendo que sua soma é igual a 26,4.

4. Sendo $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{3{,}5}$, calcular os antecedentes, sabendo que $x + y = 18{,}7$.

5. Sendo $\frac{a}{0{,}3} = \frac{b}{0{,}7} = \frac{c}{1{,}2} = \frac{d}{1{,}3}$, calcular os antecedentes, sabendo $a + b + c = 1{,}54$.

6. Dividir 120 metros de pano em três partes proporcionais aos números 3, 4 e 7. (Resultados com êrro inferior a 0,001m)

7. Uma fazenda de 648 hectares foi dividida em quatro quinhões proporcionais aos números 2, 3, 4 e 5. Calcular em metros quadrados cada um dos quinhões.

8. Sabendo que $a : \frac{2}{3} :: b : \frac{3}{4} :: c : \frac{2}{5} :: d : \frac{5}{6}$, calcular os antecedentes, cuja soma é $15\frac{1}{2}$.

9. Sabendo que $a : \frac{1}{2} :: b : \frac{3}{4} :: c : 0{,}666\ldots\ldots :: d : 0{,}444\ldots\ldots$ calcular os antecedentes, cuja soma é $\frac{17}{12}$.

10. Sendo $\frac{a}{11} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13}$, calcular os antecedentes, sabendo que $a + b - c = 50$.

11. Sendo $\frac{7}{a} = \frac{10}{b} = \frac{12}{c}$, calcular os conseqüentes, sabendo que $4a + 3b + 2c = 43$.

12. Sendo $\frac{21}{a} = \frac{35}{b} = \frac{56}{c}$, calcular os conseqüentes, sabendo que $4a + 3b + 2c = 43$.

13. Dada a proporção $a : b :: c : d$, provar que $5a + b : b :: 5c + d : d$.

14. Dada a proporção $a : b :: c : d$, provar que $a : a - b :: c : c - d$.

15. Dada a proporção $a : b :: c : d$, provar que ....

$$ax + by : ax - by :: cx + dy : cx - dy$$

Quarta propriedade. *Multiplicando ordenadamente duas ou mais proporções, os quatro produtos ainda formam uma proporção.*

Multiplicar ordenadamente duas ou mais proporções significa multiplicar os primeiros têrmos, depois os segundos, em seguida os terceiros e por último os quartos.

$$\text{H.}\left\{\begin{array}{l} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \\ m : n :: r : s \end{array}\right. \qquad \text{T.}\ \{\ aem : bfn :: cgr : dhs$$

Por hipótese, temos :

$$\left\{\left[\begin{array}{c} \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \\[2ex] \dfrac{e}{f} = \dfrac{g}{h} \\[2ex] \dfrac{m}{n} = \dfrac{r}{s} \end{array}\right]\right\}$$

Multiplicando estas três igualdades, resulta :

$$\frac{aem}{bfn} = \frac{cgr}{dhs} \quad \therefore$$

$$aem : bfn :: cgr : dhs$$

C. Q. D.

Quinta propriedade. *Elevando os quatro têrmos de uma proporção a uma mesma potência, os quatro resultados ainda formam uma proporção.*

$$\text{H.}\ \{\ a : b :: c : d \qquad \text{T.}\ \{\ a^m : b^m :: c^m : d^m$$

Por hipótese . . . . . $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $\therefore$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \therefore \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m} \therefore a^m : b^m :: c^m : d^m$$

C. Q. D.

Sexta propriedade. *Extraindo a mesma raiz dos quatro têrmos de uma proporção, os quatro resultados ainda formam uma proporção.*

$$\text{H.}\ \{\ a : b :: c : d \qquad \text{T.}\ \{\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$$

Por hipótese . . . . . $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $\therefore$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} \therefore \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}} \therefore$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d} \qquad \text{C. Q. D.}$$

Sétima propriedade. *Quando duas proporções têm os mesmos antecedentes, os conseqüentes formam uma proporção.*

$$\text{H.} \begin{cases} a : m :: b : n \\ a : r \ :: b : s \end{cases} \qquad \text{T.} \left\{ m : n :: r : s \right.$$

$$\text{Por hipótese} \left\{ \begin{array}{l} a : m :: b : n \\ a : r \ :: b : s \end{array} \right\}$$

$$\text{Alternando,} \left\{ \begin{array}{l} a : b :: m : n \\ a : b :: r \ : s \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \\[2ex] \dfrac{a}{b} = \dfrac{r}{s} \end{array} \right\}$$

As razões $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ sendo iguais à razão $\frac{a}{b}$, são iguais entre si ; logo,

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \therefore m : n :: r : s \qquad \text{C. Q. D.}$$

Oitava propriedade. *Quando duas proporções têm os mesmos conseqüentes, os antecedentes formam uma proporção.*

$$\text{H.} \left\{ \begin{array}{l} a \ : b :: c : d \\ m : b :: n : d \end{array} \right\} \qquad \text{T.} \left\{ a : c :: m : n \right.$$

$$\text{Por hipótese,} \left\{ \begin{array}{l} a \ : b :: c : d \\ m : b :: n : d \end{array} \right\}$$

$$\text{Alternando,} \left\{ \begin{array}{l} a \ : c :: b : d \\ m : n :: b : d \end{array} \right\} \therefore \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \\[2ex] \dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{d} \end{array} \right\} \therefore$$

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{n} \therefore a : c :: m : n \qquad \text{C. Q. D.}$$

Observação. *Quando duas razões são iguais, o produto delas é igual ao quadrado de uma delas.*

Consideremos as razões iguais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Sendo iguais, teremos :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2}$$

De modo amálogo provaríamos que, *quando três razões são iguais, o produto delas é igual ao cubo de uma delas.* Por exemplo, sendo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

teremos $\frac{acm}{bdn} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{m^3}{n^3}$. E assim por diante.

Exercícios. Série XXV

1. Dada a proporção $\frac{x}{11} = \frac{y}{12}$, calcular x e y, sabendo que $xy = 1\,617$.

2. A área de um terreno retangular é de 8 875,20m². Calcular as duas dimensões, sabendo que elas são proporcionais aos números 5 e 6.

3. Uma sala retangular tem uma área de 60 metros quadrados. Calcular com êrro inferior a 0,001m as duas dimensões, sabendo que elas são proporcionais aos números 3 e 4.

4. E' dada a proporção $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$. Calcular x e y, sabendo que $x^2y^2 = 90\,000$.

5. O volume de um bloco retangular é de 8 232dm³. Calcular as três dimensões, sendo elas proporcionais aos números 2, 3 e 4.

N. B. A resolução dêste problema exige uma raiz cúbica, que será encontrada nas tabelas. (pág. 204)

6. Sabendo que $\frac{14}{x} = \frac{14{,}7}{y} = \frac{16{,}1}{z}$, calcular os conseqüentes cujo produto é 9,66

Capítulo IV

Grandezas Proporcionais

63. Grandezas diretamente proporcionais. Consideremos duas grandezas quaisquer, heterogêneas e variáveis, mas que dependem uma da outra, como acontece, por exemplo, com as duas grandezas seguintes: **o comprimento** *de uma peça de fazenda e o* **preço** *desta mesma peça.*

E' sabido que o *preço* desta peça depende do seu *comprimento*. Portanto, o *comprimento* e o *preço* desta peça são duas grandezas heterogêneas e variáveis, *mas que dependem uma da outra.* Se o comprimento aumenta, o preço também aumenta; se o comprimento diminue, o preço também diminue. Supondo que 1 metro desta fazenda custe 3 cruzeiros, 5 metros custarão 15 cruzeiros; se 5 metros custam 15 cruzeiros, 4×5 metros custarão 4×15 cruzeiros, isto é, 60 cruzeiros; se 24 metros custam 72 cruzeiros, $24 \div 3$ metros custarão 72 cruzeiros $\div 3$, isto é, 8 metros custarão 24 cruzeiros. Enfim, *se o comprimento* da peça é multiplicado ou dividido por **n,** *o preço da mesma peça* fica multiplicado ou dividido por **n.** Dizemos em Matemática que estas duas grandezas são *diretamente proporcionais* ou, simplesmente, *proporcionais*.

Duas grandezas variáveis e que **dependem uma da outra,** *são* **diretamente proporcionais,** *quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os dois valores correspondentes da segunda.*

Por exemplo,

5 metros custam 15 cruzeiros
20 metros custam 60 cruzeiros
$$\left\{ \frac{5 \text{ metros}}{20 \text{ metros}} = \frac{15 \text{ cruzeiros}}{60 \text{ cruzeiros}} \right.$$

24 metros custam 72 cruzeiros
8 metros custam 24 cruzeiros
$$\left\{ \frac{24 \text{ metros}}{8 \text{ metros}} = \frac{72 \text{ cruzeiros}}{24 \text{ cruzeiros}} \right.$$

64. Grandezas inversamente proporcionais. Consideremos agora outras duas grandezas quaisquer, também heterogêneas e variáveis, e que também dependem uma da outra, como acontece, por exemplo, com as duas grandezas seguintes: a **velocidade** de um ciclista que percorre uma certa estrada, e o **tempo** necessário para percorrê-la.

Suponhamos que a estrada tem 300km. E' evidente que, *quanto maior* é a velocidade do ciclista, *tanto menor* é o tempo necessário para percorrer esta estrada.

Se o ciclista percorre apenas 10km por hora, isto é, se a *velocidade* do ciclista é de 10km por hora, o *tempo* necessário para percorrer toda a estrada é igual a 300km ÷ 10km, isto é, 30 horas. Entretanto, se o ciclista duplica a sua velocidade e consegue percorrer 20km por hora, o tempo necessário para percorrer toda a estrada será igual a 300km ÷ 20km, isto é, 15 horas. Portanto, o tempo necessário para percorrer toda a estrada fica reduzido à metade do tempo primitivo.

Um autómovel que possa percorrer 60km por hora, percorrerá esta estrada em 300km ÷ 60km, isto é, em 5 horas. Entretanto, se a velocidade do automóvel ficar reduzida à sua têrça parte, isto é, a 20km, o tempo necessário para percorrer a estrada toda será três vêzes maior; com efeito 300km ÷ 20km = = 15 horas.

Em resumo: supondo que a estrada tem 300km, teremos entre a velocidade e o tempo a seguinte correspondência de valores:

velocidade = 10km	tempo = 30 horas	
velocidade = 20km	tempo = 15 horas	(A)
velocidade = 60km	tempo = 5 horas	

E concluímos que, se a velocidade é **multiplicada** ou **dividida** por **n**, o tempo fica **dividido** ou **multiplicado** por **n.** Dizemos em Matemática que estas duas grandezas são *inversamente proporcionais.*

Voltando ao quadro A, tomemos duas velocidades quaisquer e os tempos correspondentes, por exemplo,

velocidade = 10 km	tempo = 30 horas
velocidade = 60km	tempo = 5 horas

Agora, *não é possível escrever*

$$\frac{10\,\text{km}}{60\,\text{km}} = \frac{30\,\text{horas}}{5\,\text{horas}}$$

porque a primeira razão é igual a $\frac{1}{6}$ (a velocidade foi multiplicada por 6) ao passo que a segunda razão é igual a $\frac{6}{1}$ (o tempo ficou dividido por 6). Mas então podemos escrever :

$$\frac{10\,\text{km}}{60\,\text{km}} = \frac{5\,\text{horas}}{30\,\text{horas}}$$

E observando que a razão $\frac{5}{30}$ é a inversa ou a recíproca de $\frac{30}{5}$ diremos que :

Duas grandezas variáveis e que **dependem uma da outra,** *são* **inversamente proporcionais,** *quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual ao inverso ou à recíproca da razão entre os dois valores correspondentes da segunda.*

Observação. *Dois números são chamados* **inversos ou recíprocos** *quando seu produto é a unidade.*

Assim, o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$, porque $3 \times \frac{1}{3} = 1$; o inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$ porque $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$; o inverso de x é $\frac{1}{x}$; o de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$, etc..

Duas razões inversas são duas razões cujo produto é a unidade. As razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$, $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ são razões inversas.

Exercícios orais

1. De que depende o perímetro de um quadrado? Será êle proporcional ao *lado?* Exemplifique. E a área de um quadrado será proporcional ao lado? Exemplifique.

2. Suponhamos que a é divisível por b, sendo o quociente igual a q. O quociente é diretamente proporcional ao dividendo? Ao divisor?

3. Para construir uma casa em 60 dias, são necessários 80 operários. O que aconteceria se o número de operários ficasse reduzido à metade? Que relação há entre o *número* de operários necessários para construir uma casa, e o *tempo* necessário à construção desta mesma casa?

4. Tenho 450 litros de vinho que vou distribuir em garrafas cuja capacidade é de 1,8 litros. O que aconteceria se a capacidade de cada garrafa fosse apenas de 0,9 litros? Que relação há entre a *capacidade* de cada garrafa e o *número* de garrafas?

5. No movimento de um veículo qualquer temos de considerar três coisas distintas: o *espaço* percorrido, o *tempo* necessário para percorrê-lo, e a *velocidade* do veículo. Se o *espaço* não varia, que relação há entre o *tempo* e a *velocidade*? Se o *tempo* não varia, que relação há entre o *espaço* e a *velocidade*? Se a *velocidade* não varia, que relação há entre o *espaço* e o *tempo*?

6. Uma rua tem 850m de comprimento e 12m de largura. Se o comprimento da rua aumenta de 150m, o que acontece com a largura? Que relação há entre o comprimento e a largura da rua?

7. O valor de uma fração é proporcional ao numerador? Ao denominador?

8. Um decímetro cúbico de ouro pesa 19,200kg. Quanto pesarão 6 decímetros cúbicos? Qual a relação existente entre o *volume* de um corpo e o pêso dêste mesmo corpo? Que relação existe entre o *pêso* de um professor de Matemática e a *altura* do colégio onde êle leciona?

65. Regra de três. *Se 3 metros de sêda custam 42 cruzeiros, quanto custarão 7 metros?* Representando por x o preço dos 7 metros, podemos escrever (§ 63):

$$\frac{3}{7} = \frac{42}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{7 \times 42}{3} \quad \therefore \quad x = 98$$

Resposta. Os 7 metros custam 98 cruzeiros.

II. *Foram necessários 45 operários para fazer uma casa em 84 dias; em quantos dias 15 operários fariam a mesma casa?* Representando por x o número de dias necessários aos 15 operários para fazerem a casa, podemos escrever (§ 64):

$$\frac{45}{15} = \frac{x}{84} \quad \therefore \quad x = \frac{84 \times 45}{15} \quad \therefore \quad x = 252$$

Resposta. 15 operários fariam a casa em 252 dias.

Os dois problemas que acabámos de resolver são chamados **regra de três.**

Regra de três *é o problema no qual são dadas duas grandezas direta ou inversamente proporcionais, faz-se variar uma delas e pergunta-se qual o valor correspondente para a outra.*

A regra de três pode ser *direta* ou *inversa*. E' *direta*, quando as grandezas que nela entram são *diretamente proporcionais;* é *inversa*, quando estas mesmas grandezas são *inversamente proporcionais.*

A disposição prática para a resolução dos problemas de regra de três está indicada nos problemas que vamos resolver.

Problema I. Para fabricar 7,5kg de manteiga, são necessários 160 litros de leite. Quantos litros de leite serão necessários para fabricar 12,25kg?

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l|l} 7{,}5\text{kg} & 160 \\ 12{,}25\text{kg}\ \downarrow & x\ \downarrow \end{array}\right\} \therefore 750 : 1225 :: 160 : x$$

$$x = \frac{1225 \times 160}{750} = 261{,}333 \text{ litros}$$

Resposta. Para fabricar 12,25kg de manteiga são necessários 261,333 litros de leite.

Observação. A letra *D* significa que esta regra de três é direta; as duas setas significam em que ordem devem ser escritos os quatro números, para constituírem a proporção. Quando os dois têrmos de uma mesma razão são fracionários, podemos *inteirá-los.* (§ 56) Em lugar de 7,5 : 12,25 podemos escrever 750 : 1225.

Problema II. Um trem percorreu 125km em 3 horas e 12 minutos. Em quanto tempo percorrerá 840hm? Admite-se que o movimento do trem é uniforme, isto é, a sua velocidade é constante.

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l|l} 125\text{km} & 3\text{h e } 12\text{m} \\ 840\text{hm}\ \downarrow & x\text{ m}\ \downarrow \end{array}\right\} \begin{array}{r} 3\text{h e } 12\text{m} = 3 \times 60 + 12 = 192 \text{ minutos} \\ 840\text{hm} = 84\text{km} \end{array}$$

$$125 : 84 :: 192 : x \therefore x = \frac{84 \times 192}{125}$$

$$x = 129\frac{3}{125} \text{ (minutos)}$$

Resposta. O trem percorrerá 840hm em 2 horas, 9 minutos, 1 segundo e $\frac{11}{25}$ do segundo.

Observação. Os dois têrmos de uma mesma razão devem ser reduzidos *à mesma unidade*; os números complexos devem ser transformados em incomplexos.

Problema III. 15 operários fizeram um serviço em 23 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 21 operários para fazerem o mesmo serviço também em 23 dias?

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} 15 \text{ op.} \uparrow & 10 \text{ h} \\ 21 \text{ op.} & x \text{ h} \downarrow \end{array}\right\} \therefore\ 21 : 15 :: 10 : x$$

$$x = \frac{15 \times 10}{21} \therefore\ x = 7\text{h. } 8\text{min. } 34\text{seg. e } \frac{2}{7} \text{ do segundo.}$$

Resposta. Os operários deveriam trabalhar, diàriamente, 7 horas, 8 minutos, 34 segundos e $\frac{2}{7}$ do segundo.

Observação. A letra I indica que esta regra de três é inversa. As setas indicam em que ordem devem ser escritos os quatro números, para constituírem a proporção.

Problema IV. Um ciclista precisa ir da cidade A à cidade B. Se a sua velocidade é de 18km por hora, êle emprega 3 horas e 20 minutos para realizar a viagem. Em quanto tempo fará êle o mesmo percurso, se conseguir correr com uma velocidade igual a $\frac{5}{3}$ da velocidade primitiva?

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} 18\text{km} \uparrow & 3\text{h e } 20 \text{ min.} \\ \frac{5}{3} \text{ de } 18\text{km} & x \text{ min.} \downarrow \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{5}{3} \text{ de } 18\text{km} = 30\text{km} \\ 3\text{h e } 20\text{min.} = 200\text{min.} \end{array}$$

$$30 : 18 :: 200 : x \quad \therefore \quad x = \frac{200 \times 18}{30} = 120\text{min.}$$

Resposta. O ciclista fará a sua viagem em 2 horas.

Problema V. Se $\frac{3}{4}$ de uma peça de sêda custam £ $5\frac{1}{4}$, quanto custarão $\frac{5}{6}$ da mesma peça?

$$D \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ da peça} \\ \\ \frac{5}{6} \text{ da peça} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} £\, 5\frac{1}{2} \\ \\ £\, x \end{array} \right\downarrow \quad \therefore \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{6} :: 5\frac{1}{2} : x \quad \therefore$$

$$x = 5\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \div \frac{3}{4} \quad \therefore \quad x = \frac{11}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} \quad \therefore$$

$$x = \frac{55}{9} \text{ da } £ \quad \therefore \quad x = £\, 6 - 2 - 2{,}5$$

Resposta. $\frac{5}{6}$ da mesma peça custarão £ 6 – 2 – 2,5.

Problema VI. Um navio está em alto mar. Faltam-lhe 12 dias para completar a sua viagem, e os víveres existentes a bordo permitem que os tripulantes tenham a sua alimentação habitual durante êstes mesmos 12 dias. Sobrevindo forte tempestade, o navio fica parado durante 5 dias, a fim de reparar as avarias sofridas pelo mesmo. Podem os tripulantes contar com a sua ração habitual? Qual será a nova ração de cada tripulante?

$$I \left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ dias} \\ 17 \text{ dias} \end{array} \right. \uparrow \begin{array}{l} \text{ração} = 1 \\ \text{ração} = x \end{array} \downarrow \quad \therefore \quad 17 : 12 :: 1 : x \quad \therefore \quad x = \frac{12}{17}$$

Resposta. Cada tripulante deverá contentar-se com $\frac{12}{17}$ da ração habitual.

66. O método de redução à unidade. No parágrafo anterior resolvemos seis problemas de regra de três, pelo *método* chamado *das proporções*. O *método de redução à unidade*, que vamos aplicar na resolução dos mesmos seis problemas, consiste em achar o valor que, para uma das grandezas, corresponde ao valor 1 da outra.

Problema I. Para fabricar 7,5kg de manteiga são necessários 160 litros de leite; para fabricar 1kg serão necessários $\frac{160}{7{,}5}$; para fabricar 12,25kg serão necessários

$$\frac{160}{7{,}5} \times 12{,}25 = 261{,}333 \text{ litros}$$

Problema II. Se o trem percorre 125km em 3 horas e 12 minutos, ou 192 minutos, o tempo necessário para percorrer 1km será $\frac{192}{125}$; e o tempo necessário para percorrer 84km será

$$\frac{192}{125} \times 84 = 129 \frac{3}{125} \text{ (minutos)}$$

Problema III. Se os 15 operários devem trabalhar 10 horas por dia, para fazer um determinado trabalho, durante um certo tempo, um operário deverá trabalhar 15 vêzes mais, isto é, 15×10 horas por dia. E, se um operário deve trabalhar 15×10 horas por dia, 21 operários deverão trabalhar 21 vêzes menos, isto é,

$$\frac{15 \times 10}{21} = 7 \text{ horas, } 8 \text{ min., } 34 \text{ seg. e } \frac{2}{7} \text{ do segundo.}$$

Problema IV. O ciclista necessita de 200 minutos para fazer a sua viagem, correndo com a velocidade de 18km por hora. Se correr com a velocidade de 1km por hora, é claro que o tempo necessário para a sua viagem será 18 vêzes maior, isto é, 200×18. E se o tempo necessário para realizar a viagem, com a velocidade de um quilômetro por hora, é de 200×18 minutos, é claro que, com a velocidade de 30km por hora, êste tempo ficará 30 vêzes menor, isto é,

$$\frac{200 \times 18}{30} = 120 \text{ minutos}$$

Problema V. Se $\frac{3}{4}$ da peça custam £ $5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ custará £ $5\frac{1}{2} \div 3 = \frac{11}{2} \div 3 = \frac{11}{2 \times 3}$.

A peça toda custará $\frac{11}{2 \times 3} \times 4 = \frac{11 \times 4}{2 \times 3}$

$\frac{5}{6}$ da peça custarão $\frac{11 \times 4}{2 \times 3} \times \frac{5}{6}$, isto é,

$$\frac{11}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{55}{9} \text{ da £}$$

Problema VI. Para 12 dias de viagem, a ração é 1; para 1 dia é 12 vêzes maior, isto é, 12. Se a ração para 1 dia é 12, para 17 dias será 17 vêzes menor, isto é, $\frac{12}{17}$.

Exercícios. Série XXVI

1. Com 10kg de trapos posso fazer 7,5kg de papel. Quantos kg de trapos serão necessários para fazer 48 resmas de papel, cada resma pesando 80kg?

2. Uma fábrica de tecidos necessita de 48kg de lã para fazer 40 metros de fazenda. Quantos kg de lã serão necessários para fazer 135 metros da mesma fazenda?

3. Um automóvel percorreu em 5 horas e 20 minutos, uma distância de 180km. Quantos km percorrerá em 7 horas e 30 minutos, conservando a mesma velocidade?

4. Uma torneira despeja 2 500 litros de água em 7 horas e 15 minutos. Quantos litros despejará em 3 horas e 40 minutos?

5. Duas tábuas de peroba medem respectivamente 4m × 0,3m × 0,12m e 4,5m × 0,4m × 0,12m. A primeira custa 35 cruzeiros. Quanto custa a segunda?

N. B. Calcular primeiramente os dois volumes.

6. Para percorrer uma certa distância com a velocidade de 32km por hora, um trem gasta 5 horas e 20 minutos. Em quanto tempo êste trem faria o mesmo percurso com a velocidade de 4 500dam por hora?

7. Comprei 5 camisas por 80 cruzeiros. Quantas poderia comprar com 112 cruzeiros?

8. Um retalho de fazenda de 12,8m custa 250 cruzeiros. Quanto pagarei por um retalho da mesma fazenda, com a mesma largura, e cujo comprimento é de 2,64m?

9. Tenho 1,80m de altura. Qual é a altura de um poste cuja sombra mede 7,30m, no mesmo instante em que a minha mede 1,20m?

10. Uma turma de 20 operários faz um serviço em 25 dias. Em quantos dias a mesma turma fará um outro serviço, cuja dificuldade é igual a $\frac{3}{7}$ da dificuldade do serviço precedente? O dia de trabalho é de 10 horas.

11. Um automóvel cuja velocidade é de 45km por hora, deve fazer uma viagem em 4 horas e 15 minutos. Qual deverá ser a velocidade dêste mesmo automóvel se quiser fazer a mesma viagem em 3 horas e um quarto?

12. Um automóvel, cuja velocidade é de 45km por hora, parte de São Paulo às 6 horas da manhã, com destino ao Rio de Janeiro, onde deverá chegar às 5 horas da tarde, em ponto. Mas, por motivos imprevistos, o carro fica parado na estrada durante 1 hora e 15 minutos, depois de ter percorrido 157,5km. Qual a velocidade que o carro deve desenvolver para chegar ao Rio às 5 horas da tarde?

13. Um automóvel, com a velocidade de 40km por hora, foi da cidade A à cidade B, em 36 minutos. Em quanto tempo regressará, desenvolvendo uma velocidade de 60km por hora?

14. Em 20 dias, 15 operários tinham feito a metade de um serviço. Neste momento, 3 operários foram despedidos. Em quanto tempo os operários que ficaram podem fazer a outra metade do trabalho?

15. Um empregado ganha 3 600 cruzeiros por ano. Em 3 de setembro à noite, deixa o emprêgo. Quanto tem a receber? Os meses são contados com 30 dias cada um.

16. Um terreno retangular cuja área é de 5,36a foi vendido por 2 500 cruzeiros. Por quanto seria vendido, se medisse 120m $\times$ 76m?

17. Para fazer 30 metros de fazenda com 0,80m de largura, são necessários 42kg de lã. Empregando esta mesma quantidade de lã, e reduzindo a largura a 0,65m, qual seria o comprimento da fazenda fabricada?

18. A tripulação de um navio era de 42 homens. Faltavam ainda 30 dias para chegar ao fim da viagem, quando 8 náufragos foram recolhidos a bordo. Os víveres existentes a bordo eram suficientes para que cada tripulante tivesse a sua ração habitual até o fim da viagem. Não querendo o capitão que a ração dos tripulantes fosse diminuida, de quantos dias foi necessário antecipar o fim da viagem? Se a velocidade do navio era de 20 milhas por hora, de quanto foi necessário aumentá-la?

19. Em meu colégio tenho mantimentos para 50 alunos, durante 36 dias; 8 dias depois de iniciadas as aulas, recebo mais 15 alunos. Quantos dias durarão os mantimentos?

20. Um operário encarrega-se de capinar uma avenida e cobrí-la de areia, por 810 cruzeiros. Tendo adoecido, é substituído por um outro operário que conclue o serviço, recebendo 324 cruzeiros por 180m. Qual é o comprimento da avenida?

21. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 7 horas, e a segunda em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará êle cheio?

Solução. Seja 1 a capacidade do tanque. Se a primeira torneira enche o tanque em 7 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{7}$ do tanque. Se a segunda enche o tanque em 8 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, as duas, abertas simultâneamente, em uma hora encherão $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ do tanque, isto é, $\frac{15}{56}$ do tanque.

Ora, se para encher $\frac{15}{56}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante uma hora, para encher o tanque todo cuja capacidade é 1, durante quantas horas deverão ficar abertas?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$\text{D}\left\{\begin{array}{c|c} \frac{15}{56} & 1 \text{ hora} \\ 1\downarrow & x \text{ horas}\downarrow \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \frac{15}{56} : 1 :: 1 : x$$

$$x = 1 \div \frac{15}{56} = \frac{56}{15} = 3 \text{ horas e } 44 \text{ minutos.}$$

22. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 5 horas e a segunda o esvazia em 8. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

23. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 18 horas, a segunda em 24 horas e a terceira em 30. Abrindo-se as três torneiras, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

24. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 25 horas e a segunda, em 40. Mas a terceira o esvazia em 60. Abrindo-se as três torneiras, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

25. Duas torneiras enchem um tanque em 12 horas. Se uma delas enche o tanque em 30 horas, em quanto tempo a outra torneira poderá encher o mesmo tanque?

Solução. Seja 1 a capacidade do tanque. Se as duas torneiras enchem o tanque em 12 horas, em uma hora encherão $\frac{1}{12}$ do tanque. Se a primeira enche o tanque em 30 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{30}$ do tanque. Logo, a segunda encherá em uma hora, $\frac{1}{12} - \frac{1}{30}$ do tanque, isto é, $\frac{1}{20}$ do tanque.

Ora, se para encher $\frac{1}{20}$ do tanque, é necessário que a segunda torneira fique aberta durante 1 hora, para encher o tanque todo, cuja capacidade é 1, durante quantas horas deverá ficar aberta?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{20} & 1 \text{ hora} \\ 1 \downarrow & x \text{ horas} \downarrow \end{array} \right\} \therefore \frac{1}{20} : 1 :: 1 : x$$

$$x = 1 \div \frac{1}{20} = 20 \text{ horas}$$

26. Um operário faz uma certa tarefa em 15 dias, e outro faz a mesma tarefa em 21 dias. Se os dois trabalharem juntos, em quantos dias a farão? Supõe-se que o dia de trabalho tem 8 horas.

27. Três operários, trabalhando separadamente, constroem uma parede em 15, 21 e 40 dias. Em quantos dias poderiam êles construir a mesma parede, se trabalhassem juntos? Supõe-se que êles trabalham 9 horas por dia.

28. Dois operários constroem uma parede em 25 dias. Um dêles, trabalhando só, constrói a mesma parede em 36 dias. Pergunta-se em quantos dias o outro operário seria capaz de executar sòzinho a mesma tarefa. Admite-se que os operários trabalham 11 horas por dia.

29. Três operários constroem uma parede em 60 dias. Dois dêles, trabalhando separadamente, constroem a mesma parede em 120 e 150 dias. Em quantos dias o terceiro construiria a mesma parede, trabalhando só? Admite-se que êstes operários trabalham 10 hors por dia.

30. As passagens de 42 estudantes, da cidade A à cidade B, isto é, numa distância de 195km, importam em 598 cruzeiros. Em quanto importa-

riam as passagens de 105 estudantes que quisessem fazer uma excursão à cidade C, supondo que a distância entre as cidades A e C é de 510km?

31. A dificuldade na tradução do francês está para a dificuldade na tradução do latim, assim como 0,15 está para 0,72. Se um estudante traduz 3 páginas e $\frac{2}{5}$ de um texto francês em 4 horas e 10 minutos, em quantas horas traduzirá 2 páginas e $\frac{1}{4}$ de um texto latino? Supõe-se que a paginação é a mesma nos dois livros.

67. Regra de três composta. *Problema I.* Um negociante pagou Cr.$ 14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante 48 dias. Quanto pagaria êle para iluminá-la 8 horas por dia, durante 72 dias?

A resolução dêste problema pode ser dividida em duas partes.

Primeira parte. Um negociante pagou Cr.$14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante um certo número de dias. Quanto pagaria êle para iluminá-la 8 horas por dia, durante o mesmo número de dias?

E' um problema de regra de três, simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{c|c} 3\ h & 14{,}25 \\ 8\ h \downarrow & y\$ \downarrow \end{array} \right\} \quad \therefore \quad 3 : 8 :: 14{,}25 : y \qquad (A)$$

Observação. E' inútil calcular y, como veremos adiante.

Segunda parte. Se o negociante gastou **y** cruzeiros para iluminar sua loja durante 48 dias, quanto gastaria para iluminá-la durante 72 dias?

E' um problema de regra de três, simples e direta.

$$D \left\{ \begin{array}{c|c} 48\ d & y \\ 72\ d \downarrow & x \downarrow \end{array} \right\} \quad \therefore \quad 48 : 72 :: y : x \qquad (B)$$

Multiplicando as proporções A e B (§62, 4.º propriedade), teremos:

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14{,}25 \times y : y \times x$$

Dividindo ambos os têrmos da segunda razão por y (§61, 5.ª corolário), teremos:

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14{,}25 : x \qquad (C)$$

Observação. Está explicado por que não foi necessário calcular y.

Da proporção C deduzimos fàcilmente o valor de x.

$$x = \frac{14{,}25 \times 8 \times 72}{3 \times 48} = 57 \text{ cruzeiros}$$

A disposição prática para a resolução dêste problema, pode ser a seguinte:

Cr.$ 14,25	3 horas	48 dias
x	8 horas	72 dias

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 3\text{ h} \\ 8\text{ h} \end{matrix}\ \Bigg\downarrow\right\} \qquad \left.\begin{matrix} 3 : 8 \\ 48 : 72 \end{matrix}\right\} :: 14{,}25 : x$$

$$3 \times 48 : 8 \times 72 :: 14{,}25 : x$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 48\text{ d} \\ 72\text{ d} \end{matrix}\ \Bigg\downarrow\right\} \qquad x = \frac{14{,}25 \times 8 \times 72}{3 \times 48} = 57 \text{ cruzeiros}$$

Resposta. O negociante pagaria 57 cruzeiros.

Explicação. Escrevem-se os dados do problema em duas linhas horizontais, e de modo que as grandezas homogêneas se correspondam em linhas verticais. Em seguida, escrevem-se à esquerda, e uns por baixo dos outros, os pares de grandezas homogêneas, exceto o par em que entra x. E depois raciocina-se: a despesa é *diretamente proporcional* ao número de horas, assim como ao número de dias, isto é, $3 : 8 :: 14{,}25 : x$ e $48 : 72 :: 14{,}25 : x$. A razão em que entra y é inútil.

Problema II. 30 operários, trabalhando 10 horas por dia, durante 24 dias, fizeram 180m de fazenda. Quantos metros fariam 40 operários, trabalhando 9 horas por dia, durante 18 dias?

A resolução dêste problema pode ser dividida em três partes.

Primeira parte. Se 30 operários fazem 180m de fazenda, quantos metros farão 40 operários?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 30\text{ op.} \\ 40\text{ op.} \end{matrix}\ \Bigg\downarrow \quad \begin{matrix} 180\text{m} \\ y \end{matrix}\ \Bigg\downarrow\right\} \quad \therefore \quad 30 : 40 :: 180 : y \quad \text{(A)}$$

Segunda parte. Trabalhando 10 horas por dia, fizeram-se y metros; quantos metros se fariam, trabalhando 9 horas por dia?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$D\left\{\begin{array}{ll} 10\text{ h} & y\text{ m} \\ 9\text{ h}\downarrow & z\text{ m}\downarrow \end{array}\right\} \;\therefore\; 10 : 9 :: y : z \qquad \text{(B)}$$

Terceira parte. Em 24 dias fizeram-se **z** metros; quantos metros se fariam em 18 dias?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$D\left\{\begin{array}{ll} 24\text{ d.} & z\text{ m} \\ 18\text{ d.}\downarrow & x\text{ m}\downarrow \end{array}\right\} \;\therefore\; 24 : 18 :: z : x \qquad \text{(C)}$$

Multiplicando as proporções A, B e C, teremos:

$$30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180yz : xyz$$

Dividindo ambos os têrmos da segunda razão por yz, teremos:

$$30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180 : x \quad \therefore$$

$$x = \frac{40 \times 9 \times 18 \times 180}{30 \times 10 \times 24} = 162\text{m}$$

A disposição prática para a resolução dêste problema, pode ser a seguinte:

30 op.	10 horas	24 dias	180 metros
40 op.	9 horas	18 dias	x

$$D\left\{\begin{array}{l} 30\text{ op.} \\ 40\text{ op.}\downarrow \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 30 : 40 \\ 10 : 9 \\ 24 : 18 \end{array}\right\} :: 180 : x$$

$$D\left\{\begin{array}{l} 10\text{ h} \\ 9\text{ h}\downarrow \end{array}\right\} \; 30 \times 10 \times 24 : 40 \times 9 \times 18 :: 180 : x$$

$$D\left\{\begin{array}{l} 24\text{ d} \\ 18\text{ d}\downarrow \end{array}\right\} \qquad x = \frac{40 \times 9 \times 18 \times 180}{30 \times 10 \times 24} = 162\text{m}$$

Resposta. Os 40 operários, trabalhando 9 horas por dia, durante 18 dias, fariam 162 metros.

Problema II. 600 operários, trabalhando 10 horas por dia, empregaram 50 dias para cavar um canal com 1500m de comprimento, 8m de largura e 4m de profundidade. Em quantos dias 720 operários, trabalhando 8 horas por dia, cavarão um canal de 2000m de comprimento, 7m de largura e 3m de profundidade, em um terreno duas vêzes mais difícil que o primeiro?

A resolução dêste problema pode ser dividida em seis partes.

Primeira parte. Se 600 operários fazem o serviço em 50 dias, 720 operários em quantos dias o farão?

E' um problema de regra de três, simples e *inversa* porque, para fazer um determinado serviço, é evidente que, quanto **maior** é o número de operários nele empregado, tanto **menor** é o número de dias, necessário para concluí-lo; quanto *menor* é o número de operários nele empregado, tanto *maior* é o número de dias, necessário para concluí-lo.

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} 600\text{ op.}\uparrow & 50\text{ d.}\downarrow \\ 720\text{ op.} & y \end{array}\right\} \therefore \quad 720 : 600 :: 50 : y \qquad \text{(A)}$$

Segunda parte. Se foram necessários y dias, trabalhando os operários durante 10 horas por dia, quantos dias seriam necessários, trabalhando os operários durante 8 horas por dia?

E' um problema de regra de três simples e *inversa.*

Com efeito, quanto **maior** é o número de horas diárias para fazer um determinado serviço, tanto **menor** é o número de dias, necessário para concluí-lo; quanto **menor** é o número de horas diárias para fazer um determinado serviço, tanto **maior** é o número de dias, necessário para concluí-lo.

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll} 10\text{ h}\uparrow & y\text{ dias}\downarrow \\ 8\text{ h} & z\text{ dias} \end{array}\right\} \therefore \quad 8 : 10 : y : z \qquad \text{(B)}$$

Terceira parte. Se foram necessários z dias, tendo o canal 1500m de comprimento, quantos dias seriam necessários para um canal de 2000m de comprimento?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{ll} 1500\text{ m}\downarrow & z\text{ dias}\downarrow \\ 2000\text{ m} & t\text{ dias} \end{array}\right\} \therefore \quad 1500 : 2000 :: z : t \qquad \text{(C)}$$

Quarta parte. Se foram necessários t dias, tendo o canal 8m de largura, quantos dias seriam necessários para um canal de 7m de largura?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l|l} 8\,\text{m} & t \text{ dias} \\ 7\,\text{m}\downarrow & u \text{ dias}\downarrow \end{array}\right\} \quad \therefore \quad 8 : 7 :: t : u \qquad \text{(D)}$$

Quinta parte. Se foram necessários u dias, tendo o canal 4m de profundidade, quantos dias seriam necessários para um canal de 3m de profundidade?

E' um problema de regra de três simples e direta.

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l|l} 4\,\text{m} & u \text{ dias} \\ 3\,\text{m}\downarrow & v \text{ dias}\downarrow \end{array}\right\} \quad \therefore \quad 4 : 3 :: u : v \qquad \text{(E)}$$

Sexta parte. Se foram necessários v dias para cavar o canal num certo terreno, quantos dias seriam necessários para cavar o mesmo canal num terreno duas vêzes mais difícil?

Representando a *dificuldade* do primeiro terreno por 1, a dificuldade do outro será 2. Êste último problema é ainda um problema de regra de três simples e direta.

$$\text{D}\left\{\begin{array}{l|l} 1\text{ (dif.)} & v \text{ dias} \\ 2\text{ (dif.)}\downarrow & x \text{ dias}\downarrow \end{array}\right\} \quad \therefore \quad 1 : 2 :: v : x \qquad \text{(F)}$$

Multiplicando as proporções A, B, C, D, E e F, teremos:

$$720\times8\times1\,500\times8\times4\times1 : 600\times10\times2\,000\times7\times3\times2 :: 50yztuv : xyztuv$$

Dividindo ambos os membros da segunda razão por $yztuv$, teremos:

$$720 \times 8 \times 1\,500 \times 8 \times 4 \times 1 : 600 \times 10 \times 2\,000 \times 7 \times 3 \times 2 :: 50 : x \quad \therefore$$

$$x = \frac{600 \times 10 \times 2\,000 \times 7 \times 3 \times 2 \times 50}{720 \times 8 \times 1\,500 \times 8 \times 4 \times 1} = 91 \text{ dias}$$

A disposição prática para a resolução dêste problema pode ser a seguinte:

600 op.	**10 h.**	**50 d.**	**1 500m.c.**	**8m.l.**	**4m.p.**	**1 (dif.)**
720 op.	**8 h.**	x	**2 000m.c.**	**7m.l.**	**3m.p.**	**2 (dif.)**

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}600 \text{ op.}\\720 \text{ op.}\end{array}\right.\uparrow$$

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{l}10 \text{h.}\\8 \text{h.}\end{array}\right.\uparrow$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{l}1\,500 \text{ m. c.}\\2\,000 \text{ m. c.}\end{array}\right.\uparrow$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{l}8 \text{ m. l.}\\7 \text{ m. l.}\end{array}\right.\downarrow$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{l}4 \text{ m. p.}\\3 \text{ m. p.}\end{array}\right.\downarrow$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{array}{l}1 \text{ (dif.)}\\2 \text{ (dif.)}\end{array}\right.\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}6 : 5\\8 : 10\\3 : 4\\8 : 7\\4 : 3\\1 : 2\end{array}\right\} :: 50 : x$$

$$6\times8\times3\times8\times4 : 5\times10\times4\times7\times3\times2 :: 50 : x$$

$$x = \frac{5\times10\times4\times7\times3\times2\times50}{6\times8\times3\times8\times4} = 91 \text{ dias.}$$

Resposta. Os 720 operários, trabalhando 8 horas por dia, cavarão o fosso de 2000m × 7m × 3m, em 91 dias.

Observação. Em lugar de escrevermos 720 : 600, escreveremos 6 : 5. Com efeito, os dois têrmos da razão 720 : 600 são divisíveis por 120, e é permitido dividir ambos os têrmos desta razão por 120, porque o valor da razão não se altera. Considerando a razão 1 500 : 2 000, seus têrmos são divisíveis por 500 ; portanto, em lugar de 1 500 : 2 000, é bastante escrever 3 : 4.

68. Definição da regra de três composta. Consideremos o primeiro problema do parágrafo anterior. Seus dados são os seguintes :

Cr.$ 14,25	3 horas	48 dias
x	8 horas	72 dias

O negociante pagou Cr.$ 14,25 para iluminar a sua loja 3 horas por dia, durante 48 dias. Esta despesa é proporcional ao número de horas, 3 horas, e ao número de dias, 48 dias. Variando o número de horas e o número de dias, a despesa também varia. Pois bem :

Chama-se **regra de três composta,** *o problema no qual se dá uma certa quantidade* (Cr.$ 14,25) *e duas ou mais que lhe são proporcionais* (3 horas e 48 dias) ; *fazem-se variar estas duas ou mais, e pergunta-se qual o valor que resulta para a primeira.*

O primeiro problema (§ 67) se decompõe em **duas** *regras de de três simples*, porque a despesa é proporcional a **duas quantidades:** o número de horas e o número de dias.

O segundo problema (§ 67) se decompõe em **três** *regras de três simples*, porque o número de metros é proporcional a **três quantidades:** o número de operários, o número de horas diárias de trabalho e o número de dias.

O terceiro problema (§ 67) se decompõe em **seis** *regras de três simples*, porque o número de dias é proporcional a **seis quantidades:** o número de operários, o número de horas diárias de serviço, o comprimento, a largura e a profundidade do canal, e a dificuldade do terreno.

Exercícios. Série XXVII

1. Um operário recebeu 84 cruzeiros por 12 dias de trabalho, trabalhando 10 horas por dia. Quanto deverá receber por 15 dias de trabalho, trabalhando 11 horas por dia?

2. Se 9 operários, ao cabo de 6 dias de trabalho, recebem 432 cruzeiros, quanto receberão 14 operários por 12 dias de trabalho?

3. 15 operários, trabalhando durante 16 dias, fizeram 320m de fazenda. Quantos metros farão 24 operários, trabalhando durante 21 dias?

4. Paguei 12 cruzeiros por 3,75m de fôrro com 0,80m de largura. Quanto pagarei por 6,25m de sêda, com 0,75m de largura, supondo que o valor do fôrro seja igual a 0,24 do valor da sêda?

Observação. Suponha-se que a sêda vale 100; o fôrro valerá 24.

5. 21 pedreiros, trabalhando 10 horas por dia, durante 32 dias, construiram 42m de parede. Quantos metros de parede poderiam construir 28 pedreiros, trabalhando 9 horas por dia, durante 56 dias, supondo que a atividade da segunda turma é igual a $\frac{3}{4}$ da atividade da primeira?

Observação. A atividade da primeira turma pode ser representada pelo menor número divisível por 4, isto é, pelo próprio número 4. Então a atividade da segunda turma será representada pelo número 3.

6. Para ajardinar um terreno retangular com 4,5dam$\times$12,5m, 8 operários trabalharam durante 10 dias de 6 horas. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 12 operários para ajardinar um terreno retangular com 54m $\times$ 160dm, em 11 dias?

7. 15 operários, trabalhando 12 horas por dia, durante 25 dias, fizeram um certo trabalho. Quantas horas por dia deverão trabalhar 16 operários, para fazerem 0,9 do mesmo trabalho, supondo que a atividade da primeira turma está para a da segunda, assim como 3 está para 5?

Observação. Representando o primeiro trabalho por 10, o segundo será representado por 9.

8. 40 operários, trabalhando durante 25 dias de 8 horas, fizeram um canal de 12m $\times$ 2,5m $\times$ 0,8m. Qual será o comprimento de um canal com

3,4m de largura e 0,12m de profundidade, feito por 50 operários, trabalhando durante 30 dias de 9 horas, supondo que a dificuldade do primeiro trabalho está para a do segundo, assim como 3 está para 4?

9. A guarnição de um forte é constituída de 300 homens e tem mantimentos suficientes para que cada soldado receba a sua ração habitual durante 3 meses e 20 dias, quando chega ao forte um refôrço de 80 homens. Sendo necessário que os mantimentos durem 4 meses, qual deve ser a ração diária de cada homem?

Observação. Suponha-se que a ração primitiva é 1.

10. Um navio com 20 tripulantes e 36 passageiros inicia uma viagem cuja duração está fixada em 48 dias. Ao cabo, porém, de 12 dias, um desarranjo nas máquinas faz com que a viagem deva durar 15 dias mais do que o determinado. E no mesmo dia em que as máquinas ficam avariadas, é necessário recolher a bordo 8 homens de um navio naufragado alguns dias antes. A quanto ficará reduzida a ração de cada pessoa, tripulante, passageiro ou náufrago, para que os víveres existentes a bordo durem até o fim da viagem?

11. Um automóvel, viajando 10 horas por dia, durante 7 dias, percorreu 3 400km. Um outro automóvel, viajando 8 horas e meia por dia, durante 6 dias, percorreu 2 880km. Qual é o mais veloz?

Observação. Suponha-se a velocidade do primeiro igual a 1.

12. 40 operários trabalharam durante 25 dias de 8 horas e receberam 6 120 cruzeiros. Qual será a quantia necessária para pagar 54 operários que trabalharam durante 18 dias de 6 horas?

13. Para consertar uma estrada de rodagem com 24km de comprimento, foi necessário que 32 homens trabalhassem 8 horas por dia, durante 45 dias. Quantas horas por dia deveriam trabalhar 48 homens, para consertar 21km da mesma estrada, em 50 dias?

14. Para derrubar 12,8ha de mata, 60 camaradas trabalharam durante 48 dias. Quantos dias trabalhariam 48 camaradas para derrubar 5 alqueires de mata, supondo que esta turma seja duas vêzes mais ativa que a primeira? O dia de trabalho é de 10 horas, e o alqueire mede 5 000 braças quadradas.

15. Dois reservatórios de água medem respectivamente 8,4m × 2,4m × × 0,72m e 7,2m × 3,6m × 0,80m. Uma torneira enche o primeiro reservatório em 2 dias e 12 horas, e outra enche o segundo em 3 dias de 18 horas cada um. Qual é a torneira que despeja mais água por hora?

69. Porcentagem. *Comprei uma casa por* 72 500 *cruzeiros. Algum tempo depois vendí-a com um lucro de* 14%. *Quanto ganhei? Quanto recebí?*

Em primeiro lugar vejamos o que significa a expressão 14%. Esta expressão, que se lê 14 *por cento,* significa que *em cada* 100 *ganhei* 14. Por exemplo, se eu comprei um relógio por 100 cruzeiros e depois o vendí com 14% de lucro, quer isto dizer que, pelo meu relógio, recebí 100 cruzeiros + 14 cruzeiros.

Portanto, para resolver o problema acima, é bastante modificar o seu enunciado, dando-lhe a forma de um problema de regra de três.

Sôbre 100 *ganhei* 14; *sôbre* 72 500 *cruzeiros quanto ganhei?*

$$\text{D}\begin{Bmatrix} 100 & 14 \\ 72\,500 & x \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad 100 : 72\,500 :: 14 : x$$

$$x = \frac{72\,500 \times 14}{100} \quad \therefore \quad x = 10\,150$$

Resposta. Ganhei 10 150 cruzeiros e recebí pela casa 72 500 cruzeiros + 10 150 cruzeiros, isto é, 82 650 cruzeiros.

O problema proposto tem duas perguntas: *quanto ganhei* e *quanto recebí*. Para resolvê-lo, calculámos primeiramente quanto ganhei e, em seguida, somámos o lucro com a quantia que eu tinha pago pela casa.

Entretanto, poderíamos calcular, em primeiro lugar, *quanto recebí* pela casa, *sem calcular o lucro* que tive neste negócio.

Se eu vendí a casa, com 14% de lucro, quer isto dizer que, em cada 100, ganhei 14. Portanto, recebí 114 *pelo que me custou* 100. Ora,

Se recebí 114 *pelo que me custou* 100, *quanto recebí pelo que me custou* 72 500 *cruzeiros?*

$$\text{D}\begin{Bmatrix} 100 & 114 \\ 72\,500 & x \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad 100 : 72\,500 :: 114 : x$$

$$x = \frac{72\,500 \times 114}{100} \quad \therefore \quad x = 82\,650$$

Resposta. Recebí pela casa 82 650 cruzeiros.

Exercícios orais

Calcular:

1. 1% de 100 cruzeiros	**4.** 1% de 200 francos	**7.** 3% de 50 cruzeiros
2. 3% de 200 cruzeiros	**5.** 5% de 300 dólares	**8.** 2% de 80 cruzeiros
3. 5% de 400 cruzeiros	**6.** 4% de 600 libras	**9.** 5% de 160 cruzeiros

10. Comprei um relógio por 500 cruzeiros e vendí-o com um lucro de 6%. Quanto ganhei? Quanto recebí?

11. Um colégio tem 100 alunos; foram reprovados 8; quantos % foram reprovados?

12. Uma companhia de 300 homens perdeu 60 em combate. Quantos % morreram? Quantos % se salvaram?

13. De uma classe com 50 alunos foram aprovados 42; quantos % foram reprovados?

14. Um negociante quer ganhar 12% sôbre um artigo que lhe custou 200 cruzeiros. Por quanto deve vendê-lo?

15. O café em grão, depois de torrado, perde 18% de seu pêso. A quanto se reduzem 400kg de café em grão, depois de torrado?

16. As beterrabas dão 15% de seu pêso, em açúcar. Quantos kg de açúcar podemos extrair de 600kg de beterrabas?

17. Um chapéu de 50 cruzeiros é vendido com um abatimento de 10%, por ter um pequeno defeito. Quanto se pagará por êste chapéu?

70. Definições. Um segundo ano ginasial tem 50 alunos. No fim do ano são aprovados 42 e reprovados 8. A razão (§ 53) entre o número de aprovados e o número de matriculados é $42 \div 50$ ou $^{42}/_{50}$; entre o número de reprovados e o de matriculados é $8 \div 50$ ou $^{8}/_{50}$.

Portanto,
$$\begin{cases} \dfrac{\textit{alunos aprovados}}{\textit{alunos matriculados}} = \dfrac{42}{50} \\[2ex] \dfrac{\textit{alunos reprovados}}{\textit{alunos matriculados}} = \dfrac{8}{50} \end{cases}$$

Multiplicando os dois têrmos de cada uma das frações acima, por 2, teremos:

$$\frac{\textit{alunos aprovados}}{\textit{alunos matriculados}} = \frac{42}{50} = \frac{84}{100} = 0{,}84 = 84\%$$

$$\frac{\textit{alunos reprovados}}{\textit{alunos matriculados}} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$$

E diremos que, em relação a êste segundo ano ginasial, *a taxa de porcentagem* de aprovação é 84 e a de reprovação é 16.

O número de matriculados, isto é, 50, é chamado **principal;** o número 84 ou o número 16, das expressões 84% e 16%, é chamado **taxa de porcentagem;** o número de aprovados ou de reprovados, isto é, 42 ou 8, é chamado **porcentagem.**

Quanto às expressões 84% e 16% não têm nome particular; são lidas 84 *por cento* e 16 *por cento* e significam:

$$\left\{\begin{array}{l}84 \text{ em cada } 100\\ 16 \text{ em cada } 100\end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}0{,}84 \text{ de}\ldots\ldots\ldots\\ 0{,}16 \text{ de}\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

Porcentagem *é o resultado que se obtém, quando se calculam* **uns tantos por cento** ou **uns tantos centésimos** de uma *quantidade qualquer*. De acôrdo com o problema proposto, a porcentagem é também chamada *desconto, abatimento, lucro, prejuízo, comissão, rendimento, renda*, etc..

Principal *é a quantidade da qual se pede a porcentagem*. Quando o principal é dinheiro, dá-se-lhe o nome de **capital.**

Taxa de porcentagem, ou simplesmente **taxa,** é a porcentagem *de um principal ou capital fixo*. Êste principal fixo é 100.

71. Cálculo da porcentagem. Um colégio tinha, em 1931, *cêrca de 720 alunos matriculados no curso ginasial. No fim do ano letivo, a aprovação foi de 95%. Quantos alunos foram aprovados?*

$$\text{D} \left\{\begin{array}{ll}100 & 95\\ 720 & x\end{array}\right\} \quad \therefore \quad 100 : 720 :: 95 : x$$

$$x = \frac{95 \times 720}{100} = 684$$

Resposta. Foram aprovados 684 alunos.

Exercícios. Série XXVIII

1. Comprei um automóvel por 8 650 cruzeiros e, algum tempo depois, vendí-o com um lucro de 14%. Quanto recebí?

2. O capital inicial de uma empresa é de 8 milhões de cruzeiros. Ao cabo de um ano verifica-se que os lucros obtidos representam 24% dêste capital. A diretoria da empresa resolve, então, distribuir em esmolas 30% de seus lucros. Em quanto importam estas esmolas?

3. Um negociante comprou à vista mercadorias no valor de 15 400 cruzeiros. Tendo conseguido um desconto de 4%, quanto pagou pelas mercadorias?

4. A passagem do Rio a São Paulo, em primeira classe, custa Cr.$64,40. Os menores de 12 anos pagam meia passagem. Um casal com 5 filhos, dos quais 2 são menores de 12 anos, necessitando fazer esta viagem, ida e volta, consegue uma redução, nas passagens, de 35%. Em quanto importam os bilhetes necessários?

5. O superfosfato de cal contém 14% de seu pêso em ácido fosfórico. Um kg de ácido fosfórico custa 3 cruzeiros. Quanto custarão 4 200kg de superfosfato de cal?

6. Um negociante comprou 135 bois a 96 cruzeiros cada um. Tendo pago à vista, fizeram-lhe um abatimento de 8% sôbre a importância total a pagar. Morreram 22 bois e os restantes foram vendidos a 115 cruzeiros cada um. O negociante ganhou ou perdeu? Quanto?

7. Comprei três peças de sêda, medindo respectivamente 32,5m, 40,8m e 45,2m, a 15 cruzeiros o metro. Pagando à vista, tive um desconto de 6%. Por quanto hei de vender cada metro para realizar um lucro de 25% sôbre o custo líquido desta sêda?

8. Comprei um terreno com 456m de comprimento por 248m de largura, à razão de 12 cruzeiros o metro quadrado. Por quanto hei de vender cada are dêste terreno, para realizar um lucro de 18% sôbre o preço de compra?

9. Um cobrador de aluguéis tem uma comissão de 8 ½% sôbre os aluguéis recebidos. Tendo recebido 54 000 cruzeiros de aluguéis, durante o ano de 1 931, qual foi a sua comissão?

10. Um grupo escolar tem 1 260 alunos. A taxa de porcentagem de freqüência, durante o mês de abril, foi de 92,35 por cento. Se o mês de abril teve 25 dias letivos, quantos alunos compareceram em média, e por dia, ao estabelecimento?

11. Supondo que o café em grão, depois de torrado, perde 18 ¾% de seu pêso, quantos quilos de café torrado darão 54kg de café em grão?

12. Um negociante comprou 200 sacas de café, pesando cada uma 60kg, a 250 cruzeiros o quintal métrico. Vendeu $^2/_5$ dêste café com um prejuízo de 5%. Por quanto deve vender cada saca do café restante para ganhar 12% sôbre todo o café?

13. Quanto é $^1/_5$% de 720 cruzeiros?

14. Qual é a diferença entre 5 ½% de 640 cruzeiros e 7 ¼% de 750 cruzeiros?

15. Comprei 5,24m de sêda a Cr.$ 34,60 o metro. Fizeram-me um desconto de 5,25 %. Quanto paguei?

72. Preço líquido. Entro numa chapelaria; vejo um chapéu que me agrada e cujo preço, marcado no próprio chapéu, é 80 cruzeiros. Converso com o negociante e consigo um abatimento de 10%, comprando, portanto, o chapéu por 72 cruzeiros. A esta quantia, 72 cruzeiros, damos o nome de *preço líquido* do chapéu, ou *líquido a pagar* pelo chapéu.

Para calcular o preço líquido de uma mercadoria, pode-se calcular, em primeiro lugar, o desconto ou abatimento feito sôbre o preço marcado, e diminuir êste desconto ou abatimento, do mesmo preço. Entretanto, o preço líquido pode ser obtido diretamente, isto é, sem calcular o desconto.

Exercício. *Sôbre uma fatura* (uma conta) *de* 3 640 *cruzeiros, um negociante fez um desconto de* 15%. *Qual é o líquido a pagar?*

O comprador conseguiu um desconto de 15%, isto é, de 0,15 da importância da conta; neste caso, êle deve pagar 0,85 ou 85% da importância da mesma conta. E' necessário então resolver o seguinte problema de regra de três:

Se, por 100 *pago* 85, *por* 3 640 *cruzeiros quanto pagarei?*

$$D \begin{Bmatrix} 100 & 85 \\ 3\,640 & x \end{Bmatrix} \therefore \quad 100 : 3\,640 :: 85 : x$$

$$x = \frac{3\,640 \times 85}{100} = 3\,094$$

Resposta. O líquido a pagar pela fatura apresentada é de 3 094 cruzeiros.

Exercícios. Série XXIX

1. Em um combate, um batalhão de 640 homens perdeu 35% do seu efetivo. Quantos soldados sobreviveram?

2. Um criador tinha 7 400 cabeças de gado. Uma moléstia qualquer dizimou 48% dos seus rebanhos. Quantos animais sobreviveram?

3. Comprei mercadorias no valor de 7 548 cruzeiros. Pagando à vista, conseguí um desconto de 7 ½%. Quanto paguei pelas mercadorias compradas?

73. Cálculo da taxa. *Em uma fatura de* 420 *cruzeiros, fizeram-me um desconto de* 63 *cruzeiros. Qual foi a taxa combinada para o desconto?*

Êste problema pode ser resolvido com uma regra de três.

Em uma fatura de 420 *cruzeiros fizeram-me um desconto de* 63 *cruzeiros; em uma fatura de* 100, *qual seria o desconto?*

$$D \begin{Bmatrix} 420 & 63 \\ 100 & x \end{Bmatrix} \therefore \quad 420 : 100 :: 63 : x$$

$$x = \frac{100 \times 63}{420} = 15$$

Resposta. Se o desconto em 100 é 15, a taxa de desconto é 15%.

Exercícios. Série XXX

1. Comprei por 12 cruzeiros um objeto de 15 cruzeiros. Qual foi a taxa de desconto?

2. Vendí por Cr.$ 1 581,20, o que me custou Cr.$ 1 340,00. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro?

3. Comprei um cavalo por 2 350 cruzeiros e vendí-o com um prejuízo de 564 cruzeiros. Qual foi a taxa de porcentagem do prejuízo?

4. Uma resma de papel tem 20 mãos, cada mão 5 cadernos e cada caderno 5 folhas. Um negociante compra uma resma dêste papel por Cr.$ 37,50 e vende cada folha a 10 centavos. Qual é a taxa de porcentagem do lucro?

5. Um negociante comprou 120 pacotes de velas por 480 cruzeiros. Estando 10 pacotes estragados, cada um dêstes foi vendido por $\frac{3}{4}$ do preço de compra. Tendo vendido os outros a Cr.$ 5,25, qual foi a taxa de porcentagem do lucro?

6. Comprei 60 metros de sêda por 1 260 cruzeiros. Vendí 18 metros com um lucro de 22%. Os metros restantes foram vendidos de uma só vez por Cr.$ 1 031,94. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro nesta venda? E na venda de toda a peça?

7. Um terreno com 156 metros de comprimento por 95 metros de largura foi comprado a 3 600 cruzeiros o hectare e vendido a 42 cruzeiros o are. Qual foi a taxa de porcentagem do lucro?

74. Cálculo do principal. *Um joalheiro vende um anel por 406 cruzeiros, com um lucro de 16%. Qual é o custo dêste anel?*

Êste problema pode ser resolvido com o auxílio da regra de três. Suponhamos que o joalheiro compra o anel por 100 cruzeiros. Se quiser vendê-lo com um lucro de 16%, deverá vendê-lo por 116 cruzeiros. E diremos:

Se a um preço de venda igual a 116, *corresponde um preço de custo igual a* 100, *a um preço de venda igual a* 406 *cruzeiros, que preço de custo corresponderá?*

$$\text{D}\left\{\begin{matrix} 116 & 100 \\ 406 & x \end{matrix}\right\} \therefore \quad 116 : 406 :: 100 : x$$

$$x = \frac{406 \times 100}{116} \quad \therefore \quad x = 350$$

Resposta. O custo do anel é 350 cruzeiros.

Exercícios. Série XXXI

1. Vendendo o meu automóvel por 10 200 cruzeiros, perdí 25% do custo do mesmo. Por quanto tinha eu comprado êste automóvel?

2. Um empregado de uma casa comercial, tendo direito a 8% das vendas por êle realizadas durante o ano, recebe, no fim do ano, a sua comissão de 7 200 cruzeiros. Quanto vendeu êle durante o ano?

3. Vendí um relógio por 320 cruzeiros, com um lucro de 24%. Por quanto tinha eu comprado êste relógio?

4. Paguei Cr.$ 566,80 por uma fatura sôbre a qual me fizeram um desconto de 8%. Qual era a importância desta fatura?

5. Um exército entrou em combate. Perdeu 36% do seu efetivo e sobreviveram 11 520 soldados. De quantos homens se compunha êste exército?

6. Supondo que 30% da população de uma cidade seja constituída de estrangeiros, e que os nacionais são 560 000, qual é a população desta cidade?

7. A população de uma cidade é de 445 300 habitantes. Qual era a sua população há 10 anos, sabendo-se que, durante êstes 10 anos, ela aumentou de 22%?

8. Um negociante mistura 80 litros de vinho com 12 litros de água. Qual é a porcentagem de água que esta mistura contém?

Solução. A mistura tem 92 litros. Se 92 litros da mistura contêm 12 litros de água, 100 litros da mistura quantos litros de água conterão?

$$92 : 12 :: 100 : x \quad .\because. \quad x = \frac{100 \times 12}{92} \quad .\because. \quad x = 13\frac{1}{23}$$

Resposta. A porcentagem de água é de $13\frac{1}{23}$ %.

9. Misturam-se 84 litros de álcool com 24 de água. Qual é a porcentagem de álcool que esta mistura contém?

10. Em um colégio há 360 brasileiros e 42 estrangeiros. Qual é a porcentagem dos estrangeiros?

11. Ligam-se 120g de ouro com 25g de cobre. Qual é a porcentagem de ouro que esta liga contém?

12. Dissolvem-se 3 litros de sal em 52 litros de água. Qual é a porcentagem de sal que esta mistura contém?

13. Tenho duas águas salgadas. A primeira contém 24 litros de água e 3 litros de sal; a segunda contém 50 litros de água e 7 litros de sal. Qual é a água mais salgada? Qual é a porcentagem de sal em cada água?

75. Fórmulas. Todos os problemas resolvidos nos parágrafos anteriores podem ser resolvidos com o auxílio de *fórmulas.* Estas são muito úteis na vida prática. O empregado de uma casa comercial, sendo encarregado de calcular descontos em faturas pagas à vista, não pode perder tempo em raciocinar sôbre o problema que lhe é apresentado, armar a regra de três, etc., etc.; êle tem necessidade de uma *fórmula,* a qual lhe permita resolver rapidamente o problema que lhe é proposto muitas vêzes no decorrer de um mesmo dia.

O estudante, porém, deve raciocinar, resolvendo todos os problemas de um modo direto, isto é, raciocinando sôbre cada um dêles. O fim principal da Matemática é o desenvolvimento do raciocínio; para conseguir êste fim, professores e alunos deverão evitar, tanto quanto possível, até certo ponto, o emprêgo de fórmulas. Entretanto, o estabelecimento de fórmulas é um ótimo exercício teórico, que não podemos dispensar num curso secundário.

Para estabelecer as fórmulas de porcentagem, vamos recorrer ao *cálculo literal*, isto é, substituir os números por letras. O *principal* ou *capital* será representado pela letra c, a *taxa de porcentagem* pela letra i, a *porcentagem* pela letra p e o preço líquido de uma mercadoria qualquer pela letra l.

76. Fórmula para calcular a porcentagem. Para estabelecer esta fórmula, resolveremos o seguinte problema:

Comprei mercadorias cujo valor é c. Tendo pago à vista, fizeram-me um desconto de $i\%$. Calcular o desconto.

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 100 & i \\ c & p \end{matrix}\right\} \quad \therefore \quad 100 : c :: i : p \quad \therefore$$

$$p = \frac{ci}{100} \qquad \text{(A)}$$

A fórmula A nos permite calcular uma porcentagem, quando são dados o principal e a taxa; ela significa que:

Para calcular uma porcentagem, um desconto, um abatimento, uma comissão, um lucro, um prejuízo, uma renda, etc., **multiplica-se o principal pela taxa, e divide-se o produto por 100.**

Na prática, é conveniente, às vêzes, dar à **fórmula A** a seguinte **forma:**

$$p = \frac{c}{100} \times i \qquad \text{(B)}$$

A *fórmula* B é preferível, quando a taxa é fracionária. Por exemplo, qual será o abatimento que se deve fazer em uma fatura de 345 cruzeiros, sendo a taxa de $7\frac{1}{2}\%$?

$$p = \frac{345}{100} \times \frac{15}{2} = \text{Cr.\$ } 25{,}87$$

77. Fórmula para calcular um preço líquido. Entrei numa joalheria, vi um relógio que me agradou e cujo preço era c. O negociante vendeu-me o relógio com um abatimento de $i\%$. Quanto paguei pelo relógio?

Para estabelecer uma fórmula que nos permita resolver de pronto êste problema, é necessário fazer o raciocínio seguinte:

Sendo o desconto igual a i, eu pagarei $100 - i$ pelo que me custar 100. Ora, se pelo que me custa 100, eu devo pagar $100 - i$, quanto devo pagar pelo que custa c?

$$\text{D} \left\{ \begin{matrix} 100 & 100 - i \\ c & l \end{matrix} \right\} \quad \therefore \quad 100 : c :: 100 - i : l$$

$$l = \frac{c(100 - i)}{100} \qquad \text{(C)}$$

A fórmula C significa que:

Para calcular o preço líquido de um objeto qualquer, vendido ou comprado com desconto, ou para calcular o líquido de uma fatura sôbre a qual se faz um desconto qualquer, **multiplica-se o principal pela diferença entre 100 e a taxa, e divide-se o produto por 100.**

Na prática convém, às vêzes, dar à **fórmula** C a seguinte **forma:**

$$l = \frac{c}{100} \times (100 - i) \qquad \text{(D)}$$

Esta fórmula é preferível quando a taxa é fracionária. Por exemplo, quanto se pagará por uma fatura de 345 cruzeiros, sôbre a qual se faz um desconto de $7\tfrac{1}{2}\%$?

$$l = \frac{345}{100} \times \left(100 - \frac{15}{2}\right) = \text{Cr.\$ } 319{,}12$$

78. Fórmula para calcular um preço de venda. Um negociante tem uma mercadoria que lhe custou c. Por quanto deve vendê-la, para ganhar $i\%$ sôbre o preço de custo?

Seja v o preço de venda, e façamos o seguinte raciocínio:

P = C - M(t)

Se uma mercadoria que custa 100, deve ser vendida por $100 + i$, uma outra que custa c, por quanto deve ser vendida?

$$\text{D} \begin{Bmatrix} 100 & 100 + i \\ c & v \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad 100 : c :: 100 + i : v$$

$$v = \frac{c(100 + i)}{100} \qquad \text{(E)}$$

A fórmula E significa que:

Para calcular o preço de venda de um objeto qualquer, sôbre o qual se quer ganhar **i%**, *multiplica-se o preço de custo por* **100 + i**, *e divide-se o produto por* **100.**

Quando a taxa é fracionária, convém dar à **fórmula** E a seguinte **forma:**

$$v = \frac{c}{100} \times (100 + i) \qquad \text{(F)}$$

Exemplo. Qual será o preço de venda de um artigo que custa 324 cruzeiros, se o negociante quiser ganhar sôbre êle $7\frac{1}{2}\%$?

$$v = \frac{324}{100} \times \left(100 + \frac{15}{2}\right) = \text{Cr.\$ } 348{,}30$$

Exercícios. Série XXXII

1. Vendí um automóvel por 8 568 cruzeiros. Neste negócio perdí 32% do custo do automóvel. Quanto tinha eu pago pelo mesmo?

2. Comprei fazendas no valor de 25 000 cruzeiros. Vendí 84% desta fazenda com $15\frac{3}{4}\%$ de lucro, e o restante pelo custo. Quanto ganhei?

3. Um colégio tem 312 alunos internos, e os externos representam 48% do número total de alunos. Quantos alunos tem êste colégio?

4. Um caixeiro viajante tem uma diária de 25 cruzeiros e uma comissão de 8% sôbre as vendas realizadas. Sua despesa diária é de 32 cruzeiros. Tendo economizado 1 260 cruzeiros em um mês, quanto vendeu durante êste mês?

5. O café fino perde na torração 15% de seu pêso. A manipulação de uma arroba (15kg) de café em pó, custa 12 cruzeiros. Se o torrador compra café fino a 3 cruzeiros o kg, qual será para êle o custo de 1kg de pó de café? E por quanto deverá vendê-lo para ganhar 20% do custo?

79. Divisão em partes diretamente proporcionais. Dois meninos, cujas idades respectivas são 5 e 7 anos, recebem de seu pai um presente de 120 cruzeiros. Entretanto, esta quantia não é para ser repartida em partes iguais pelos dois meninos; *deve ser*

repartida em partes proporcionais às idades dos mesmos, isto é, aos números 5 *e* 7. Como resolver êste problema?

Repartir 120 cruzeiros em *partes proporcionais,* ou simplesmente, proporcionais aos números 5 e 7, é repartir esta quantia em duas porções tais que, dividindo a primeira por 5 e a segunda por 7, os dois quocientes sejam iguais. Representando então estas duas porções por x e y, teremos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

Aplicando a esta proporção a segunda propriedade das proporções (§ 62), teremos:

$$x + y : 5 + 7 :: \begin{Bmatrix} x : 5 \\ y : 7 \end{Bmatrix}$$

E, lembrando que $x + y = 120$ cruzeiros, resulta:

$$120 : 12 :: \begin{Bmatrix} x : 5 \\ y : 7 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} x = \dfrac{5 \times 120}{12} = 50 \\ y = \dfrac{7 \times 120}{12} = 70 \end{matrix}$$

O menino mais moço recebe 50 cruzeiros e o mais velho, 70.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a dois números dados, é dividí-lo em duas partes tais que, divididas respectivamente por êstes mesmos números, os quocientes sejam iguais.

Vamos agora estabelecer **fórmulas** para resolver êste problema.

Seja N um número que se quer dividir em duas partes proporcionais aos números a e b. Representando as duas partes por x e y, teremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \therefore \quad x + y : a + b :: \begin{Bmatrix} x : a \\ y : b \end{Bmatrix} \quad \therefore$$

$$N : a + b :: \begin{Bmatrix} x : a \\ y : b \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = \dfrac{Na}{a + b} & \text{(A)} \\ y = \dfrac{Nb}{a + b} & \text{(B)} \end{cases}$$

Aplicação. Dividir 910 cruzeiros em partes proporcionais aos números 7 e 13.

Chamando x e y às duas partes pedidas e aplicando as fórmulas A e B, teremos:

$$x = \frac{910 \times 7}{7 + 13} \qquad y = \frac{910 \times 13}{7 + 13}$$

$$x = \frac{910 \times 7}{20} \quad \therefore \quad x = 45{,}5 \times 7 \quad \therefore \quad x = \text{Cr.\$ } 318{,}50$$

$$y = \frac{910 \times 13}{20} \quad \therefore \quad y = 45{,}5 \times 13 \quad \therefore \quad y = \text{Cr.\$ } 591{,}50$$

Exercícios. Série XXXIII

1. Dividir o número 500 em partes proporcionais aos números 21 e 29.
2. Dividir o número 1 260 em partes proporcionais aos números 12 e 23.
3. Dividir 50 em partes proporcionais às frações $^2/_3$ e $^3/_4$.

Solução. $x : \frac{2}{3} :: y : \frac{4}{5}$

Multiplicando os conseqüentes por 15, m.m.c. dos denominadores, teremos:

$$x : \frac{2 \times 15}{3} :: y : \frac{4 \times 15}{5} \quad \therefore \quad x : 10 :: y : 12 \quad \therefore \quad x : 5 :: y : 6, \text{ etc..}$$

4. Dividir 60 em partes proporcionais aos números 0,3 e 1,2.

Solução. $x : 0{,}3 :: y : 1{,}2$

Multiplicando os conseqüentes por 10, para suprimir as vírgulas, teremos:

$$x : 3 :: y : 12 \quad \therefore \quad x : 1 :: y : 4, \text{ etc..}$$

5. Dividir 120 em partes proporcionais aos números $3\frac{1}{2}$ e $4^1/_3$.
6. Dividir 200 em partes proporcionais aos números $^7/_8$ e 1,5.
7. Dividir o número A em partes proporcionais aos números m e n.

80. Divisão em partes proporcionais a três números dados. Uma escola rural tem três classes; o primeiro ano com 25 alunos, o segundo com 20 e o terceiro com 15. A professora desta escola recebe 300 laranjas para repartí-las pelas classes, porém em partes proporcionais ao número de alunos de cada classe. Como efetuar esta distribuição?

As três porções devem ser tais que, divididas respectivamente pelos números 25, 20 e 15, os quocientes sejam iguais. Representando as três porções por x, y e z, teremos:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15}$$

Temos três razões geométricas iguais. Aplicando a êste grupo de razões iguais a terceira propriedade das proporções (§ 62) teremos:

$$x + y + z : 25 + 20 + 15 :: \begin{cases} x : 25 \\ y : 20 \\ z : 15 \end{cases}$$

E, lembrando que $x + y + z = 300$, resulta:

$$300 : 60 :: \left\{ \begin{array}{l} x : 25 \\ y : 20 \\ z : 15 \end{array} \right\} \therefore \begin{cases} x = 125 \\ y = 100 \\ z = \ \ 75 \end{cases}$$

O primeiro ano recebe 125 laranjas; o segundo, 100; o terceiro, 75.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a três números dados, é dividí-lo em três partes tais que, divididas respectivamente por êstes três números, os quocientes sejam iguais.

Êste problema também pode ser resolvido por fórmulas.

Seja N um número que se quer dividir em três partes proporcionais aos números a, b e c. Representando estas três partes por x, y e z, teremos:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \therefore x + y + z : a + b + c :: \left\{ \begin{array}{l} x : a \\ y : b \\ z : c \end{array} \right\} \therefore$$

$$N : a + b + c :: \left\{ \begin{array}{l} x : a \\ y : b \\ z : c \end{array} \right\} \therefore \begin{cases} x = \dfrac{Na}{a + b + c} & \text{(C)} \\ y = \dfrac{Nb}{a + b + c} & \text{(D)} \\ z = \dfrac{Nc}{a + b + c} & \text{(E)} \end{cases}$$

Aplicação. Repartir 7 200 cruzeiros em partes proporcionais aos números 12, 13 e 15.

Chamando x, y e z às três partes pedidas, e aplicando as fórmulas, C, D e E, teremos:

$$x = \frac{7200 \times 12}{12+13+15} \qquad y = \frac{7200 \times 13}{12+13+15} \qquad z = \frac{7200 \times 15}{12+13+15}$$

$$x = \frac{7200 \times 12}{40} \qquad y = \frac{7200 \times 13}{40} \qquad z = \frac{7200 \times 15}{40}$$

$$x = 2\,160 \text{ cruzeiros} \qquad y = 2\,340 \text{ cruzeiros} \qquad z = 2\,700 \text{ cruzeiros}$$

Exercícios. Série XXXIV

1. Dividir 9 460 cruzeiros em partes proporcionais aos números 11, 13 e 19.

2. Dividir o número 11 550 em partes proporcionais às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.

Solução. Representando as quatro partes por x, y, z e t, teremos:

$$x : \frac{1}{2} :: y : \frac{1}{3} :: z : \frac{1}{4} :: t : \frac{1}{5}$$

Multiplicando os conseqüentes por 60, *m.m.c. dos denominadores,* teremos:

$$x : 30 :: y : 20 :: z : 15 :: t : 12, \text{ etc..}$$

3. Dividir o número 5 000 em partes proporcionais aos números $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$.

4. Dividir 200 metros de fazenda em três partes cujos comprimentos sejam proporcionais aos números 1,5m, 2,4m e 3,6m.

5. Dividir 80 laranjas em duas porções tais que uma seja igual a $\frac{3}{5}$ da outra.

Solução. Representa-se a primeira porção pelo número 1 e a segunda pelo número $\frac{3}{5}$, e divide-se 80 em duas partes proporcionais aos números 1 e $\frac{3}{5}$.

Pode-se também representar a primeira porção por um número divisível por 5, por exemplo, pelo número 20; neste caso, a segunda porção será representada por um número igual a $\frac{3}{5}$ de 20; isto é, pelo número 12. E divide-se 80 em duas partes proporcionais aos números 20 e 12.

O mais simples é representar a primeira porção por 5, a segunda por 3, e dividir 80 em partes proporcionais aos números 5 e 3.

6. Dividir 450 cruzeiros em três partes tais que a segunda seja a metade da primeira, e a terceira seja um têrço da segunda.

Solução. Supondo que a primeira porção seja 1, a segunda será $\frac{1}{2}$ e a terceira será $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, isto é $\frac{1}{6}$. E divide-se 450 cruzeiros em partes proporcionais aos números 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ ou 6, 3 e 1.

7. Dividir 540 cruzeiros em três partes tais que a primeira e a terceira sejam iguais, e a segunda seja igual a $\frac{7}{10}$ da terceira.

8. Três sitiantes alugaram um pasto de 5 alqueires, pagando anualmente 350 cruzeiros por hectare. O primeiro pôs neste pasto 85 bois, o segundo 75, e o terceiro 40. Qual deve ser a contribuição anual de cada sitiante? (*)

9. Três empregados foram gratificados com 4 920 cruzeiros e reparti-esta quantia em três partes tais que a primeira está para a segunda, assim como 2 está para 5, e a segunda está para a terceira, assim como 3 está para 4. Quanto recebeu cada um?

Solução. Representando as três partes por x, y e z, é necessário que elas satisfaçam às seguintes igualdades:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \qquad\qquad \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \text{(A)}$$

Suponhamos $x = 6$; neste caso, teremos:

$$\frac{6}{y} = \frac{2}{5} \quad \therefore \quad y = 15 \qquad\qquad \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad \frac{15}{z} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad z = 20$$

Portanto, sendo $x = 6$, y será igual a 15 e z será igual a 20. E a soma das três partes x, y e z, devendo ser igual a 4 920 cruzeiros, é bastante dividir esta quantia em partes proporcionais aos números 6, 15 e 20.

Observação. Convém notar que fizemos $x = 6$, isto é, igual ao produto dos numeradores 2 e 3 das proporções (A).

10. Tenho 4 peças de sêda. O comprimento da primeira está para o da segunda, assim como 2 está para 3; o da segunda está para o da terceira, assim como 4 está para 7; o da terceira está para o da quarta, assim como 3 está para 5. O comprimento das 4 peças é de 402,8m. Qual é o comprimento de cada uma?

11. Três irmãos recebem uma herança de 680 000 cruzeiros. Pagam 5 ½% de impostos e repartem o restante em três partes tais que a primeira está

(*) Considerar o alqueire com 5 000 braças quadradas.

para a segunda, assim como 4 está para 5, e a segunda está para a terceira, assim como 5 está para 8. Qual é a parte de cada um?

12. Uma peça de fazenda foi repartida em três porções cujos comprimentos são proporcionais aos números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$. A segunda porção tem 17 metros mais que a primeira. Calcular o comprimento da peça e o de cada porção.

Solução. $x : \frac{1}{2} :: y : \frac{2}{3} :: z : \frac{5}{6} \quad \therefore \quad x : 3 :: y : 4 :: z : 5$

Se a segunda porção tem 17 metros mais que a primeira, segue-se que $y = x + 17$. Portanto,

$$x : 3 :: x + 17 : 4 \quad \therefore \quad 3(x + 17) = 4x \quad \therefore \quad 3x + 51 = 4x \quad \therefore$$

$$x = 51 \quad \text{e} \quad y = 68$$

Para calcular z temos dois caminhos a seguir.

$x : 3 :: z : 5 \quad \therefore$	$y : 4 :: z : 5 \quad \therefore$
$51 : 3 :: z : 5 \quad \therefore$	$68 : 4 :: z : 5 \quad \therefore$
$z = 85$	$z = 85$

Resposta. As três porções medem 51m, 68m e 85m, e o comprimento total da peça é de 204 metros.

13. Três irmãos receberam uma herança e a dividiram em partes proporcionais aos números 2, $1\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. O primeiro recebeu 324 000 cruzeiros. Calcular a parte de cada um e o total da herança.

14. Uma porção de laranjas foi distribuida em três porções proporcionais aos números 2, 5 e 8. A terceira porção tem 78 laranjas mais que a primeira. Quantas laranjas tem cada porção? Qual é o número total de laranjas?

81. Divisão em partes inversamente proporcionais. *Dividir um número qualquer em partes inversamente proporcionais a dois números dados, é dividí-lo em partes diretamente proporcionais aos recíprocos dêstes dois números dados.* (§ 64)

Por exemplo, dividir 60 em duas partes *inversamente proporcionais* aos números 3 e 5, é o mesmo que dividir 60 em duas partes *diretamente proporcionais* aos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$. E' o que vamos mostrar. Sejam x e y as duas partes que devem ser inversamente proporcionais aos números 3 e 5. Então os números x e y, 3 e 5 formam uma regra de três simples e *inversa*, isto é,

$$\text{I} \left\{ \begin{matrix} x \downarrow & 3 \uparrow \\ y \downarrow & 5 \uparrow \end{matrix} \right\} \quad \therefore \quad x : y :: 5 : 3 \ (\S 65)$$

Dividindo os dois têrmos da segunda razão pelo produto 3×5, e simplificando, resulta:

$$x : y :: \frac{5}{3 \times 5} : \frac{3}{3 \times 5} \quad \therefore \quad x : y :: \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$$

Donde se conclue que x e y, sendo inversamente proporcionais aos números 3 e 5, são diretamente proporcionais aos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, que são os recíprocos dos números 3 e 5.

De um modo geral, seja n um número que queremos dividir em duas partes x e y, inversamente proporcionais aos números a e b. Teremos:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{array}{cc} x \downarrow & a \uparrow \\ y & b \end{array}\right\} \quad \therefore \quad x : y :: b : a$$

$$x : y : \frac{b}{a \times b} : \frac{a}{a \times b} \quad \therefore \quad x : y :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

Portanto, a regra de três simples e inversa $\left\{\begin{array}{cc} x \downarrow & a \uparrow \\ y & b \end{array}\right\}$ pode ser substituida pela regra de três simples e direta,

$$\left\{\begin{array}{cc} x \downarrow & \frac{1}{a} \uparrow \\ y & \frac{1}{b} \end{array}\right\}$$

Exercícios. Série XXXV

1. Dividir 234 em partes inversamente proporcionais aos números 4 e 5.

Solução. $x : \frac{1}{4} :: y : \frac{1}{5}$, etc..

2. Dividir 627 em partes inversamente proporcionais aos números 3 e 8.

3. Dividir 1 014 cruzeiros em três partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Solução. $x : \frac{1}{2} :: y : \frac{1}{3} :: z : \frac{1}{4}$, etc..

4. Dividir 4 075 em quatro partes inversamente proporcionais aos números, 3, 5, 7 e 10.

5. Dividir 30 000 cruzeiros em quatro partes inversamente proporcionais aos números $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{8}$.

6. Dividir 82 000 cruzeiros em três partes inversamente proporcionais aos números $2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ e 1,5.

7. Três irmãos receberam uma herança de 200 000 cruzeiros para ser repartida em partes inversamente proporcionais às suas idades, isto é, 20, 15 e 10 anos. Quanto recebeu cada um?

8. Distribuí laranjas em quatro cestas cujos volumes são inversamente proporcionais aos números 7, 5, 4 e 2. A segunda cesta contém 48 laranjas mais do que a primeira. Quantas laranjas contém cada cesta? E as quatro?

82. A área do retângulo. Consideremos dois retângulos cujas bases são iguais (5cm) e cujas alturas são diferentes. (3cm e 12cm) Desenhando-os em papel milimetrado, veremos que o maior contém 4 vêzes o menor, isto é, *a razão da área de dois retângulos,* **quando êles têm bases iguais,** *é igual à razão das alturas.*

Suponhamos agora que dois retângulos têm a mesma altura (5cm) e que as bases são diferentes. (3cm e 12cm) Desenhando-os em papel milimetrado, veremos que o maior contém 4 vêzes o menor, isto é, *a razão das áreas de dois retângulos,* **quando êles têm alturas iguais,** *é igual à razão das bases.* Em outras palavras:

As áreas de retângulos com **bases iguais** *são proporcionais às* **alturas;** *as áreas de retângulos com* **alturas iguais,** *são proporcionais às bases.*

Observação. Os estudantes devem desenhar todas as figuras indicadas neste parágrafo, para que *vejam* as conclusões a que estamos chegando.

Vamos agora desenhar dois retângulos R e R′, o primeiro com 4cm de base e 3cm de altura, e o segundo com 8cm de base e 15cm de altura. Comparando os dois retângulos, obervaremos que:

área retângulo R $= 4cm \times 3cm =$ *12cm quadrados*
área retângulo R′ $= 8cm \times 15cm =$ *120cm quadrados*

$$\frac{R}{R'} = \frac{12}{120} \quad \therefore \quad \frac{R}{R'} = \frac{4 \times 3}{8 \times 15}$$

Variando as dimensões dos dois retângulos, chegaremos sempre às mesmas conclusões, isto é:

A razão das áreas de dois retângulos, **com bases e alturas diferentes,** *é igual à razão dos produtos das bases pelas alturas.*

Exercícios em classe

1. Dois terrenos retangulares medem respectivamente 12m × 5m e 36m × 25m. Qual é a razão de seus comprimentos? E de suas larguras? E de suas áreas?

2. Mesmas perguntas em relação a dois retângulos que medem 4m × 3m e 32m × 15m.

3. Idem, em relação a um quadrado cujo lado mede 5m e a um retângulo que mede 20m × 30m.

4. Um terreno retangular mede 10m × 8m e custa 300 cruzeiros. Quanto custará outro terreno também retangular e que mede 30m × 16m?

5. Temos dois retângulos R e R′. O comprimento do segundo é o triplo do comprimento do primeiro, mas a largura do segundo é a quarta parte da largura do primeiro. Qual é a razão das áreas dêstes dois retângulos? Se o primeiro vale 400 cruzeiros, quanto vale o segundo?

Podemos agora estabelecer e demonstrar, de um modo completamente geral, o seguinte

Teorema. *As áreas de dois retângulos são proporcionais aos produtos das bases pelas respectivas alturas.*

Sejam s e s' as áreas de dois retângulos R e R′ cujas bases e alturas são respectivamente b e h, b' e h'. Consideremos um terceiro retângulo R″ cuja área é s'', cuja base é b e cuja altura é h'. Teremos:

retângulo R $\{$ área s', base b, altura h.

retângulo R′ $\{$ área s', base b', altura h'.

retângulo R″ $\{$ área s'', base b, altura h'.

Os retângulos R e R″ têm a mesma base; portanto, suas áreas são proporcionais às alturas, e teremos:

$$\frac{s}{s''} = \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

Os retângulos R′ e R″ têm a mesma altura; portanto, suas áreas são proporcionais às bases, e teremos:

$$\frac{s'}{s''} = \frac{b}{b'} \qquad (2)$$

Dividindo, membro a membro, a igualdade (1) pela igualdade (2), resulta:

$$\frac{s}{s''} \times \frac{s''}{s'} = \frac{h}{h'} \times \frac{b}{b'} \quad \therefore \quad \frac{s}{s'} = \frac{b \times h}{b' \times h'}$$

Observação. Se dois números a e a' são proporcionais aos números b e b', assim como aos números c e c', então êles são proporcionais aos produtos bc e $b'c'$, isto é, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{bc}{b'c'}$.

Exercícios. Série XXXVI

1. Dividir o número 546 em duas partes que sejam proporcionais aos números 3 e 5 e aos números 4 e 6.

Solução. Sejam x e y as duas partes. Se x e y devem ser proporcionais aos números 3 e 5, e aos números 4 e 6, então são proporcionais aos produtos 3×4 e 5×6, e podemos escrever

$$x : 3 \times 4 :: y : 5 \times 6, \text{ etc..}$$

2. Dividir 4 180 em duas partes diretamente proporcionais aos números 3 e 4, e inversamente proporcionais aos números 5 e 6.

Solução. $x : 3 \times \dfrac{1}{5} :: y : 4 \times \dfrac{1}{6}$, etc..

3. Dividir 11 950 em três partes diretamente proporcionais aos números $2\dfrac{1}{2}$, $3\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{6}$ e inversamente proporcionais aos números $\dfrac{2}{5}$, $1\dfrac{1}{3}$ e $2\dfrac{3}{4}$.

Solução. Reduzindo os números dados a frações impróprias, teremos:

$$\frac{5}{2}, \frac{10}{3} \text{ e } \frac{5}{6}; \quad \frac{2}{5}, \frac{4}{3} \text{ e } \frac{11}{4}.$$

Representando por x, y e z as três partes pedidas, teremos:

$$x : \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} :: y : \frac{10}{3} \times \frac{3}{4} :: z : \frac{5}{6} \times \frac{4}{11}, \text{ etc..}$$

4. Para construir uma parede com 15m de comprimento e 4m de altura, foi necessário que 7 operários trabalhassem durante um mês. Quantos operários seriam necessários para construir uma parede com 45m de comprimento e 12m de altura, também em um mês?

Solução.	7 operários	15m comprimento	4m altura
	x ,,	45m ,,	12m ,,

As duas turmas de operários, devendo ser proporcionais aos comprimentos e às alturas das duas paredes, isto é, aos números 15 e 45, assim como aos números 4 e 12, podemos escrever :

$$7 : 15 \times 4 :: x : 45 \times 12$$

$$x = \frac{7 \times 45 \times 12}{15 \times 4} = 63$$

Resposta. Seriam necessários 63 operários.

5. Para fazer 120m de sêda, 3 operários trabalharam 12 dias, durante 9 horas por dia. Quantos metros de sêda fariam 5 operários, em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia?

Solução.	120m	3 op.	12 dias	9 horas
	xm	5 op.	10 dias	8 horas

Os dois comprimentos 120 e x, sendo diretamente proporcionais ao número de operários, ao número de dias e ao número de horas, segue-se que 120 e x são proporcionais aos números 3, 12 e 9, assim como aos números 5, 10 e 8. E podemos escrever :

$$120 : 3 \times 12 \times 9 :: x : 5 \times 10 \times 8, \text{ etc..}$$

Observação. Os exercícios 4 e 5 nos mostram que os problemas de regra de três composta podem ser resolvidos com uma única proporção, fácil de escrever. Suponhamos um problema cujos dados são os seguintes :

$$\begin{array}{ccccc} N & a & b & c & d \\ x & a' & b' & c' & d' \end{array}$$

Se N e x são diretamente proporcionais a todos os números que entram no problema, escreveremos :

$$N : a \times b \times c \times d :: x : a' \times b' \times c' \times d'$$

Suponhamos agora um problema cujos dados são os seguintes :

$$\begin{array}{cccccc} N & a & b & c & d & e \\ x & a' & b' & c' & d' & e' \end{array}$$

Se N e x são inversamente proporcionais aos números b e b' assim como aos números d e d', e diretamente proporcionais aos outros, podemos escrever :

$$N : a \times \frac{1}{b} \times c \times \frac{1}{d} \times e :: x : a' \times \frac{1}{b'} \times c' \times \frac{1}{d'} \times e' \quad \therefore \qquad \text{(A)}$$

$$N : \frac{ace}{bd} :: x : \frac{a'c'e'}{b'd'}$$

Multiplicando os conseqüentes desta proporção por $bdb'd'$, e simplificando, resulta :

$$N : aceb'd' :: x : a'c'e'bd$$

Esta última proporção nos mostra que, em lugar da proporção A, se pode escrever imediatamente :

$$N : a \times b' \times c \times d' \times e :: x : a' \times b \times c' \times d \times e'$$

Os estudantes devem resolver por êste processo os problemas 1 a 15 do § 68, série XXVII.

83. Regra de sociedade. Dois ou mais indivíduos se associam para negociar em café, algodão, fazendas, etc.. Ao cabo de um ano ganham 120 000 cruzeiros. Se os diferentes sócios entraram a negociar com capitais iguais, isto é, se cada um dêles entrou, digamos, com 50 000 cruzeiros para o negócio, e se êles trabalharam durante o mesmo tempo, o lucro é dividido em partes iguais pelos associados. Entretanto, se entraram a negociar com capitais diferentes, não é justo que os lucros sejam repartidos em partes iguais ; com efeito, quem pôs mais dinheiro na empresa, tem direito a maior lucro. Como dividir então os lucros ? E' êste o problema chamado **regra de sociedade.**

Há quatro casos a considerar :

I. *Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos iguais.* **Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes iguais pelos sócios.**

II. *Os sócios entram com capitais diferentes e trabalham durante tempos iguais.* **Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais aos capitais.**

III. *Os sócios entram com capitais iguais e trabalham durante tempos diferentes.* **Os lucros ou prejuízos são distribuídos em partes proporcionais aos tempos.**

IV. *Os sócios entram com capitais diferentes e trabalham durante tempos diferentes.* Os lucros ou prejuízos, devendo ser proporcionais aos capitais e aos tempos, **são proporcionais aos produtos dos capitais pelos tempos.**

Exercícios. Série XXXVII

1. Três indivíduos, A, B e C, associaram-se respectivamente com 12 000 15 000 e 23 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam 60 000 cruzeiros. Distribuiram 10% dos lucros aos empregados, como gratificação. Quanto ganhou cada sócio ?

2. Quatro pessoas organizaram uma empresa comercial, entrando respectivamente com 100 000, 120 000, 150 000 e 230 000 cruzeiros. Ao cabo de

um ano ganharam 600 000 cruzeiros. Desta quantia deduziram 12% para o pagamento de impostos e 13% para gratificações aos empregados. Quanto ganhou cada sócio?

3. Antônio começou a negociar em 1.º de janeiro de 1 931, com um capital de 12 000 cruzeiros. Em 1.º de maio do mesmo ano associou-se com Carlos, o qual entrou com um capital de 15 000 cruzeiros. No fim do mesmo ano tinham ganho 24 000 cruzeiros. Quanto ganhou cada um ? Contar o ano com 12 meses, de 30 dias cada um.

4. Três indivíduos, A, B e C, formaram uma sociedade, entrando os três com o mesmo capital. O primeiro trabalhou durante 12 meses ; o segundo retirou-se da firma após 9 meses de trabalho ; o terceiro retirou-se da firma após 7 meses de trabalho. Ao cabo de 12 meses, o primeiro verificou que os lucros da firma se elevavam a 45 000 cruzeiros. Qual foi o lucro de cada sócio?

5. Em 1.º de janeiro de 1 928, Carlos começou a negociar com um capital de 30 000 cruzeiros. No dia 20 de abril do mesmo ano, associou-se com Raul, que entrou com um capital de 40 000 cruzeiros. Ganharam 106 100 cruzeiros durante o ano. Qual foi o lucro de cada um?

Nota. E' necessário considerar o ano com 365 dias e lembrar que o ano de 1 928 é bissexto.

6. Seis operários cavaram um fosso com 48,4m de comprimento, 5,2m de largura e 3m de profundidade, ganhando 5 cruzeiros por metro cúbico. O primeiro trabalhou 30 dias, o segundo 25 dias, o terceiro 22 dias, o quarto 20 dias, o quinto 18 dias e o sexto 15 dias. Quanto ganhou cada um dos operários?

7. Quatro indivíduos resolveram fundar uma fábrica. O primeiro entrou com 40 000 cruzeiros, o segundo com 50 000 cruzeiros, o terceiro entrou com tanto quanto os dois primeiros, e o quarto entrou com o edifício da fábrica, avaliado em 70 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam 65 000 cruzeiros. Tendo pago 5,5% desta quantia, em impostos, quanto ganhou cada um?

8. Três irmãos compraram uma fazenda por 730 000 cruzeiros. Ao cabo de um ano ganharam respectivamente 36 000, 50 000 e 60 000 cruzeiros. Com quanto entrou cada um dos três irmãos para comprar a fazenda?

9. Três pessoas empregaram 19 200 cruzeiros em um certo negócio. Ganharam os três 800 cruzeiros. O primeiro recebeu 200 cruzeiros, o segundo 225 cruzeiros, e o terceiro, o resto. Qual foi o capital de cada um?

10. Três pessoas associaram-se para negociar. O primeiro entrou com 3 000 cruzeiros durante 8 meses ; o segundo entrou com 4 500 cruzeiros durante 6 meses, e o terceiro com 7 500 cruzeiros durante 4 meses. Se os três sócios ganharam 5 400 cruzeiros, qual foi o lucro de cada um?

11. Dois irmãos compraram uma casa por 50 000 cruzeiros, sendo que o primeiro entrou com $^2/_5$ dêste capital e o segundo com o resto. Algum tempo depois venderam esta casa com lucro, sendo que o segundo irmão ganhou 2 000 cruzeiros mais do que o primeiro. Qual foi o lucro de cada irmão?

84. Juros; definições. Eu não tenho casa própria. A casa em que eu moro não é minha ; é *alugada*. A casa em que eu moro

pertence ao Sr. Borges. Eu pago ao Sr. Borges um *aluguel mensal* de 400 cruzeiros. Êste pagamento mensal de 400 cruzeiros que eu faço ao Sr. Borges é muito justo. Suponhàmos que esta casa vale 40 000 cruzeiros. Se o Sr. Borges não a alugasse a mim ou a outra pessoa qualquer, poderia vendê-la pelos 40 000 cruzeiros que ela vale. Em seguida, abriria uma casa comercial com êstes 40 000 cruzeiros e ganharia talvez muito mais do que os 400 cruzeiros mensais que eu lhe pago pelo *aluguel* de sua casa.

A casa do Sr. Borges, avaliada em 40 000 cruzeiros, constitue um **capital** que pertence ao Sr. Borges. O Sr. Borges é um *capitalista.* O seu *capital,* que no caso presente é a casa em que eu moro, lhe *rende o aluguel* que eu lhe pago, isto é, 400 cruzeiros por mês. Esta quantia que eu pago mensalmente ao Sr. Borges, representa o rendimento, isto é, **os juros** do capital do Sr. Borges. Qual é a razão entre o aluguel de 400 cruzeiros e o capital de 40 000? E' a fração $\frac{400}{40\,000}$ ou $\frac{1}{100}$. Se o aluguel que eu pago ao Sr. Borges é igual a 0,01 do capital dêste mesmo senhor, dizemos em linguagem comercial, que o capital do Sr. Borges lhe rende, de juros, 1% ao mês, ou 3% por trimestre, ou 6% por semestre, ou 12% ao ano. As expressões 1%, 3%, 6%, 12% são chamadas **taxas de juros** ou simplesmente **taxas.**

O Sr. Arruda também é capitalista; não tem casas para alugar, mas tem dinheiro guardado no Banco Comercial. Eu quero comprar uma casa de 50 000 cruzeiros. Não tendo dinheiro, procuro o Sr. Arruda e peço-lhe que me empreste êstes 50 000 cruzeiros. O Sr. Arruda consente em emprestar-me esta quantia, mediante certas condições:

I. Eu lhe devolverei os 50 000 cruzeiros, *ao cabo de 5 anos.*

II. Eu lhe pagarei os juros de 12% ao ano, *durante êstes cinco anos.*

Nesta transação temos quatro elementos a considerar: o **capital,** o **tempo,** a **taxa** e os **juros.**

Capital *é a quantia que se empresta.*

Juros *é o rendimento do capital emprestado, durante o tempo combinado.*

Taxa *é o rendimento ou juros de um capital fixo, durante a unidade de tempo.* O capital fixo é 100 e a unidade de tempo é geralmente o *ano*. No nosso exemplo, a taxa é 12% ao ano. Quer isto dizer que, por 100 cruzeiros, eu pagarei de juros, anualmente, ao Sr. Arruda, a quantia de 12 cruzeiros, além dos 100 cruzeiros, isto é, por 100 cruzeiros lhe pagarei 112 cruzeiros ao cabo de um ano, ou 124 cruzeiros ao cabo de dois anos, ou 136 cruzeiros ao cabo de três anos, ou 148 cruzeiros ao cabo de quatro anos, ou 160 cruzeiros ao cabo de cinco anos.

Ora, se por 100 cruzeiros que o Sr. Arruda me empresta, eu sou obrigado a pagar-lhe, depois de 5 anos, a quantia de 160 cruzeiros, segue-se que:

por 1 000 cruzeiros lhe pagarei . . . . 1 600 cruzeiros
por 10 000 cruzeiros lhe pagarei . . . . 16 000 cruzeiros
por 50 000 cruzeiros lhe pagarei . . . . 80 000 cruzeiros

Em resumo, o Sr. Arruda empresta-me um **capital** de 50 000 cruzeiros, durante um **tempo** de 5 anos e combinamos que a **taxa** de juros será de 12% ao ano. E, decorridos os 5 anos, eu deverei entregar ao Sr. Arruda os 50 000 cruzeiros que ele me emprestou e mais **30 000 cruzeiros** de **juros**!

85. Problemas sôbre juros. Os problemas sôbre juros, sendo muito freqüentes na vida prática, são geralmente resolvidos por meio de fórmulas. O *capital* é representado pela letra c; a *taxa* pela letra i, o *tempo* pela letra t, os *juros* pela letra j, e a *soma de capital e juros* pela letra s. A unidade de tempo é o *ano comercial*, isto é, o *ano de* 12 *meses, cada mês com* 30 *dias*; portanto, o *ano comercial tem* 360 *dias*.

Temos seis problemas a resolver:

I. Dados c, i, t, calcular j.
II. Dados i, t, j, calcular c.
III. Dados c, t, j, calcular i.
IV. Dados c, i, j, calcular t.
V. Dados s, i, t, calcular c.
VI. Dados s, i, t, calcular j.

86. Dados c, i, t, calcular j. Quais serão os juros de um capital c, durante t anos, sendo a taxa de juros igual a i? (*)

Para resolver êste problema, vamos enunciá-lo da seguinte maneira:

Se o capital 100, *em* 1 *ano, rende* i, *o capital* c, *em* t *anos, quanto renderá?*

E' um problema de regra de três composta.

capital 100	1 *ano*	*juros* i
capital c	t *anos*	*juros* x

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 100 \\ c \end{matrix}\right. \downarrow \qquad \left.\begin{matrix} 100 : c \\ 1 : t \end{matrix}\right\} :: i : x \quad \therefore$$

$$100 : c \times t :: i : x \quad \therefore$$

$$\mathrm{D}\left\{\begin{matrix} 1 \\ t \end{matrix}\right. \downarrow \qquad x = \frac{cit}{100}$$

Sendo x os juros do capital c, durante o tempo t, sendo a taxa i, podemos escrever:

$$j = \frac{cit}{\mathbf{100}} \qquad \text{(A)}$$

A igualdade A é uma **fórmula,** a qual nos diz que:

Para calcular os juros de **c**, *em* **t** *anos, sendo a taxa* **i**, *multiplica-se o capital pela taxa e pelo tempo, e divide-se o produto por* 100.

Aplicação. Quais são os juros de 7 650 cruzeiros, a $7\frac{3}{4}\%$ ao ano, em 5 anos?

Para trabalhar com a **fórmula** A, é conveniente dar-lhe a seguinte **forma prática:**

$$j = c \times i \times t \times \frac{1}{100}$$

Isto pôsto, teremos:

$$j = 7\,650 \times \frac{31}{4} \times 5 \times \frac{1}{100} = \text{Cr.\$ } 2\,964{,}37$$

(*) Salvo aviso em contrário, $i\ \%$ significa $i\ \%$ ao ano.

Aplicação. Calcular os juros de 12 600 cruzeiros, a 7½% ao ano, em 4 anos e 9 meses.

$$4 \text{ an.} + 9 \text{ meses} = 4 \text{ an.} + \frac{9}{12} \text{ do an.} = \frac{57}{12} \text{ do an.} = \frac{19}{4} \text{ do an.}$$

Aplicando a fórmula A, teremos:

$$j = 12\,600 \times \frac{15}{2} \times \frac{19}{4} \times \frac{1}{100} = \text{Cr.\$ } 4\,488{,}75$$

Aplicação. Calcular os juros de 5 400 cruzeiros, a 8½% ao ano, em 3 anos, 10 meses e 20 dias.

Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos:

$$3 \text{ an. } 10 \text{ m. } 20 \text{ d.} = \frac{3}{1} + \frac{10}{12} + \frac{20}{360} = \frac{3}{1} + \frac{5}{6} + \frac{1}{18} = \frac{35}{9} \text{ do ano.}$$

Aplicando a fórmula A, teremos:

$$j = 5\,400 \times \frac{17}{2} \times \frac{35}{9} \times \frac{1}{100} = \text{Cr.\$ } 1\,785{,}00$$

Voltando à fórmula A, e multiplicando os têrmos da fração por 12, teremos:

$$j = \frac{c \times i \times t \times 12}{1\,200}$$

Ora, $t \times 12$ é o número de anos, convertido em meses; substituindo $t \times 12$ pela letra m (meses) teremos:

$$j = \frac{cim}{1200} \qquad \text{(B)}$$

A fórmula B é empregada quando a unidade de tempo é o *mês*. Por exemplo, *quais são os juros de 600 cruzeiros, a 12% ao ano, em 3 anos e 4 meses?*

Reduzindo o tempo a meses, teremos:
3 anos + 4 meses = 36 meses + 4 meses = 40 meses
Aplicando a fórmula B, teremos:

$$j = 600 \times 12 \times 40 \times \frac{1}{1200} = \text{Cr.\$ } 240{,}00$$

Voltando à fórmula A, e multiplicando os têrmos da fração por 360, teremos:

$$j = \frac{c \times i \times t \times 360}{36\,000}$$

Ora, $t \times 360$ é o número de anos, convertido em dias; substituindo $t \times 360$ pela letra d (dias) teremos:

$$j = \frac{cid}{36\,000} \qquad \text{(C)}$$

A fórmula C é empregada quando a unidade de tempo é o *dia*. Por exemplo, *quais são os juros de* 600 *cruzeiros, a* 12% *ao ano, em* 4 *meses e* 20 *dias?*

Reduzindo o tempo a dias, teremos:

4 meses + 20 dias = 120 dias + 20 dias = 140 dias

Aplicando a fórmula C, teremos:

$$j = 600 \times 12 \times 140 \times \frac{1}{36\,000} = \text{Cr.\$ } 28{,}00$$

Exercícios orais

1. Quais são os juros de 400 cruzeiros, a 12% ao ano, em um ano?
2. Quanto rendem 500 cruzeiros, a 10% ao ano, em 3 anos?
3. Quais são os juros de 800 cruzeiros, a 12% ao ano, em 6 meses?
4. Quanto rendem 600 cruzeiros, a 1% ao mês, em 8 meses?
5. Quais são os juros de 800 cruzeiros, a 6% por semestre, em três meses?
6. Quanto rende o capital c, a i % ao ano, em um ano? Em 2 anos? Em 3 anos?

Exercícios. Série XXXVIII

1. Calcular os juros de 8 730 cruzeiros, a 6 ½% ao ano, em 8 meses e 15 dias.

2. Coloquei 24 300 cruzeiros em um banco, rendendo juros de 7 ½% ao ano. Ao cabo de 4 anos, 7 meses e 20 dias, retirei do banco todo o meu dinheiro. Quanto recebi?

3. Quais são os juros de 36 450 cruzeiros a 8 ¼% ao ano, em 5 anos, 10 meses e 20 dias?

4. Um capitalista vive dos seus rendimentos, isto é, dos juros de 720 000 cruzeiros que êste capitalista depositou no banco. O banco paga-lhe os juros

de $7\frac{3}{4}\%$ ao ano. Qual é a quantia que êste capitalista pode gastar mensalmente, sem diminuir o seu capital?

5. Um avarento guardou em sua casa, durante 20 anos, a quantia de 20 000 cruzeiros. Quais seriam os juros dêste capital, se estivesse guardado em um banco, supondo-se que êste banco pague aos seus clientes 12% de juros ao ano?

6. Antônio emprestou a Carlos a quantia de 720 cruzeiros, a 15% ao ano. Carlos pagou o seu débito depois de 4 meses e 12 dias. Qual foi a quantia que Carlos entregou a Antônio?

7. Comprei uma casa por 48 000 cruzeiros. Por quanto devo alugá-la mensalmente, para que eu ganhe 18% anuais do meu capital?

8. Comprei uma casa por 60 000 cruzeiros. Gastei em consertos da mesma casa, 20% do que ela me custou. Quero alugá-la de modo que eu ganhe, por semestre, $7\frac{1}{2}\%$ do meu dinheiro. Qual deve ser o aluguel mensal desta casa?

9. Emprestei 50 000 cruzeiros aos meus amigos A e B, durante o mesmo tempo. A pagou-me os juros de 12% ao ano, e B pagou-me os juros de 8% ao ano. No prazo marcado, os meus amigos A e B liquidaram seus débitos, e eu recebí de ambos os mesmos juros. Quanto emprestei a cada um dêles?

Solução. Seja x a quantia que emprestei ao meu amigo A; neste caso, ao meu amigo B emprestei 50 000 cruzeiros $- x$. Representando por j e j' os juros que A e B me pagaram, teremos:

$$j = \frac{x \times 12 \times t}{100} \qquad j' = \frac{(50\,000 - x) \times 8 \times t}{100}$$

Sendo $j = '$, teremos:

$$\frac{x \times 12 \times t}{100} = \frac{(50\,000 - x) \times 8 \times t}{100}$$

Esta igualdade é constituída por duas frações eqüivalentes; se ambas têm o mesmo denominador, os numeradores são iguais; logo, podemos escrever:

$$x \times 12 \times t = (50\,000 - x) \times 8 \times t$$

E dividindo ambos os membros desta igualdade, por t, resulta:

$$12x = (50\,000 - x)8 \quad \therefore$$
$$12x = 400\,000 - 8x \quad \therefore$$
$$x = 20\,000$$

Resposta. Emprestei 20 000 cruzeiros ao meu amigo A e 30 000 cruzeiros ao meu amigo B.

87. Dados i, t, j, calcular c. Já vimos que:

$$j = \frac{cit}{100} \qquad j = \frac{cim}{1200} \qquad j = \frac{cid}{36\,000}$$

Destas três igualdades deduzimos fàcilmente que:

$100j = cit$	$1200j = cim$	$36\,000j = cid$
$c = \dfrac{100j}{it}$	$c = \dfrac{1200j}{im}$	$c = \dfrac{36\,000j}{id}$

Na primeira fórmula a unidade de tempo é o *ano*; na segunda, é o *mês*; na terceira, é o *dia*. Na prática, convém dar a estas **fórmulas** a seguinte **forma:**

$$c = 100 \times j \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{t} \qquad \text{(A)}$$

$$c = 1200 \times j \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{m} \qquad \text{(B)}$$

$$c = 36000 \times j \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{d} \qquad \text{(C)}$$

Exercícios. Série XXXIX

1. Qual é o capital que rende 8 400 cruzeiros, a 7 ½% ao ano, em 4 anos e 8 meses?

Solução. Reduzindo a tempo a meses, teremos:

4 anos + 8 meses = 48 meses + 8 meses = 56 meses.

Aplicando a fórmula B, e lembrando que $1 \div i$ ou $1 \div \frac{15}{2}$ é igual a $\frac{2}{15}$, teremos:

$$c = 1\,200 \times 8\,400 \times \frac{2}{15} \times \frac{1}{56} = 24\,000$$

Resposta. O capital é 24 000 cruzeiros.

2. Qual é o capital que rende 1 190 cruzeiros em 4 meses e 24 dias, a 8 ½% ao ano?

3. Qual é o capital que rende 12 350 cruzeiros, em 7 anos, 8 meses e 20 dias, a 15% ao ano?

4. Gasto 1 300 cruzeiros por mês; esta quantia é o aluguel mensal de uma casa que me pertence e que rende 13% anuais do seu valor. Quanto vale esta casa?

5. Qual é a quantia que devo colocar a juros de 8 ½% anuais, para ter um rendimento mensal de Cr.$ 656,625?

88. Dados c, t, j, calcular i. Tomando as fórmulas A, B e C (§86), delas deduzimos que:

$cit = 100j \;\therefore\; i = \dfrac{100j}{ct}$	$cim = 1\,200j \;\therefore\; i = \dfrac{1\,200j}{cm}$	$cid = 36\,000j \;\therefore\; i = \dfrac{36\,000j}{cd}$

A primeira fórmula nos dá a taxa, quando a unidade de tempo é o *ano*; a segunda, quando a unidade de tempo é o *mês*; a terceira, quando a unidade de tempo é o *dia*.

Na prática, convém dar a estas **fórmulas** a seguinte **forma:**

$$i = 100 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{t} \qquad \text{(A)}$$

$$i = 1\,200 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{m} \qquad \text{(B)}$$

$$i = 36\,000 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{d} \qquad \text{(C)}$$

Exercícios. Série XL

1. A que taxa um capital de 7 200 cruzeiros rende 1 200 cruzeiros em 5 anos e 6 meses?

Solução. Reduzindo o tempo a meses, teremos:

5 anos + 6 meses = 60 meses + 6 meses = 66 meses

Aplicando a fórmula B, teremos:

$$i = 1\,200 \times 1\,200 \times \frac{1}{7\,200} \times \frac{1}{66}$$

$$i = \frac{100}{33} = 3\frac{1}{33}$$

Resposta. A taxa é de $3\,^1/_{33}\%$.

Nota. Quando a taxa é fracionária, convém dar-lhe a forma de um número mixto.

2. Qual é a taxa anual de juros adotada por um banco onde tenho 84 600 cruzeiros, se o rendimento mensal desta quantia é de 1 200 cruzeiros?

3. Emprestei 12 500 cruzeiros durante 3 anos, 5 meses e 10 dias e recebí 1 720 cruzeiros de juros. A que taxa emprestei o meu dinheiro?

4. Um banco emprestou-me 12 000 cruzeiros. Ao cabo de 4 anos, 5 meses e 20 dias, páguei ao banco 14 400 cruzeiros, isto é, o capital e os juros. Qual foi a taxa estabelecida pelo banco neste negócio?

5. Emprestei 5 800 cruzeiros ao meu amigo A, por 6 meses, ficando êle obrigado, no fim dêste prazo, a pagar-me 5 916 cruzeiros. A que taxa emprestei o meu dinheiro?

6. Comprei uma chácara de 2,5ha a 6 000 cruzeiros o hectare. Paguei 10 ½% desta quantia em impostos. Hoje esta chácara está alugada por Cr.$ 497,25 anuais. A que taxa o meu dinheiro está colocado?

7. A que taxa devo emprestar 200 cruzeiros para que o meu dinheiro duplique em 12 anos?

Solução. Se os 200 cruzeiros devem duplicar em 12 anos, conclue-se que os juros devem ser de 200 cruzeiros. Aplicando a fórmula A, teremos:

$$i = 100 \times 200 \times \frac{1}{200} \times \frac{1}{12}$$

$$i = \frac{100}{12} = 8\frac{4}{12}\,\% = 8\frac{1}{3}\,\%$$

Resposta. Para que 200 cruzeiros dupliquem em 12 anos, devem ser empregados a $8\frac{2}{3}$

8. A que taxa devo emprestar 500 cruzeiros para receber o triplo desta quantia, capital e juros, em 8 anos e 4 meses?

9. Emprestei 1 200 cruzeiros. Ao cabo de 22 anos, o meu devedor liquidou suas contas comigo, entregando-me o quádruplo do dinheiro que eu lhe tinha emprestado. Qual foi a taxa de juros?

10. A que taxa devo empregar um certo capital, para que êle duplique em 9 anos?

11. A que taxa devo empregar um certo capital, para que êle triplique em 12 anos?

12. A que taxa devo empregar um certo capital, para que êle quadruplique em 18 anos?

13. A que taxa devo empregar o meu dinheiro para que, em 3 anos e 6 meses, eu ganhe 0,3 do meu dinheiro?

14. A que taxa devo colocar os meus haveres para que os meus rendimentos anuais sejam $^1/_{15}$ dos meus haveres?

15. A que taxa devo colocar uma certa quantia para que, em 7 anos e 8 meses, os juros representam $^4/_9$ desta quantia?

89. Dados c, i, j, calcular t. Tomando as fórmulas A, B e C (§ 86), teremos, sucessivamente:

$j = \dfrac{cit}{100}$	$j = \dfrac{cim}{1\,200}$	$j = \dfrac{cid}{36\,000}$
$100j = cit$	$1\,200j = cim$	$36\,000j = cid$
$t = \dfrac{100j}{ci}$	$m = \dfrac{2\,100j}{ci}$	$d = \dfrac{36\,000j}{ci}$

A primeira fórmula dá o tempo em *anos*; a segunda, em *meses*; a terceira, em *dias*.

Na prática, é preferivel a terceira fórmula, posta sob a forma

$$d = 36\,000 \times j \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{i}$$

como vamos mostrar com um exemplo.

Em quanto tempo 3 600 cruzeiros, a $4\frac{1}{2}\%$ ao ano, rendem 1 200 cruzeiros?

Aplicando a fórmula indicada e lembrando que o fator $1 \div i$ é igual a $1 \div {}^9/_2$ ou ${}^2/_9$, teremos:

$$d = 36\,000 \times 1\,200 \times \frac{1}{3\,600} \times \frac{2}{9}$$

$$d = \frac{8\,000}{3} = 2\,666\,\frac{2}{3} \text{ dias}$$

$$\begin{array}{r|l}
2666d & 30 \\ \cline{2-2}
266 & 88m \;\; | \; \underline{12} \\
26d & 4m \quad\; 7a
\end{array}$$

Desprezando a fração ${}^2/_3$ porque nos problemas de juros as frações do dia são desprezadas, e transformando 2 666 dias em número complexo, acharemos 7 anos, 4 meses e 26 dias, que é o tempo pedido.

Exercícios. Série XLI

1. Em quanto tempo um capital qualquer, rendendo juros de 5 % ao ano, duplica de valor?

Solução. Seja c êste capital ; se êle deve duplicar, os juros serão iguais ao capital, isto é, iguais a c. Aplicando a fórmula, teremos :

$$d = 36\,000 \times c \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{5}$$

$$d = 7\,200 \text{ dias} = 20 \text{ anos.}$$

2. Em quanto tempo um capital qualquer, rendendo juros de 9 % ao ano, triplica de valor?

3. Em quanto tempo um capital qualquer, colocado a 7 ½% ao ano, rende 0,7 do seu valor?

4. Em quantos anos 12 600 cruzeiros, a 9 ½% ao ano, rendem 5 400?

5. Depositei 7 500 cruzeiros em um banco, rendendo juros de 4 ½% ao ano. Ao cabo de algum tempo retirei do banco 10 000 cruzeiros, isto é, o meu capital e os juros. Durante quanto tempo o meu dinheiro esteve no banco?

6. Emprestei 9 300 cruzeiros a um amigo, a 3 ½% ao ano. Ao cabo de algum tempo recebí o meu dinheiro e os juros, num total de Cr.$ 10 056,50. Qual foi o prazo que o meu amigo me pediu, para saldar sua dívida?

7. Um menino recebeu uma herança, a qual foi colocada em um banco, rendendo juros de 4% ao ano. Completando 21 anos, êste menino recebeu sua herança acrescida dos juros, num total de 112 700 cruzeiros. Os juros representam 0,15 do capital. Que idade tinha êste menino, quando recebeu a herança?

90. Dados s, i, t, calcular c. Neste problema, a letra s representa uma soma de capital e juros. (§ 85)

Problema. Um capital, rendendo juros de 8% ao ano, elevou-se à quantia de 12 600 cruzeiros em 3 anos, 4 meses e 20 dias. Determinar êste capital.

Solução. Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos :

$$3 \text{ an. } 4 \text{ m. } 20 \text{ d.} = \frac{3}{1} + \frac{4}{12} + \frac{20}{360} = \frac{3}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = \frac{61}{18} \text{ do ano.}$$

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, o capital 100 cruzeiros ; calculando os juros de 100 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias, a 8% ao ano, teremos :

$$j = 100 \times 8 \times \frac{61}{18} \times \frac{1}{100} = \frac{244}{9} = 27{,}111$$

Portanto, 100 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias rendem Cr.$ 27,111, e a soma do capital e dos juros será :

Cr.$ 100,00 + Cr.$ 27,111 = Cr.$ 127,111

Isto pôsto, vamos resolver o seguinte problema de regra de três:

Se a soma 127,111 corresponde ao capital inicial 100, a soma 12 600, a que capital inicial corresponderá?

$$\text{D} \left\{ \begin{matrix} 127{,}111 & 100 \\ 12\,600 & x \end{matrix} \right\} \; 127{,}111 : 12\,600 :: 100 : x$$

$$x = \frac{12\,600 \times 100}{127{,}111} = 9\,912{,}596$$

Resposta. O capital que se elevou a 12 600 cruzeiros, em 3 anos, 4 meses e 20 dias, rendendo juros de 8% ao ano, é Cr.$ 9 912,596.

Fórmula. O problema anterior pode ser resolvido com o auxílio de uma fórmula. Para estabelecê-la, é necessário resolver o seguinte problema:

Qual é o capital que, posto a render juros durante **t** *anos, sendo a taxa* **i**% *ao ano, se eleva a uma certa quantia* **s**?

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, o capital 100; calculando os juros de 100, durante t anos, a i% ao ano, teremos:

$$j = 100 \times i \times t \times \frac{1}{100} \quad \therefore \quad j = it$$

Portanto, 100, em t anos, a i% ao ano, rende it, e a soma de capital e juros será $100 + it$.

Agora, resolvamos o seguinte problema de regra de três.

Se a soma 100+**it** *corresponde ao capital inicial* 100, *a soma* **s** *a que capital corresponderá?*

$$\text{D} \left\{ \begin{matrix} 100+it & 100 \\ s & x \end{matrix} \right\} \quad \therefore \quad 100+it : s :: 100 : x$$

$$x = \frac{100s}{100 + it} \quad \therefore \quad c = \frac{100s}{100 + it} \qquad \text{(M)}$$

91. Dados s, i, t, calcular j. Suponhamos que um indivíduo depositou num banco uma certa quantia, rendendo juros de 8% ao ano e, ao cabo de 5 anos e 6 meses, retirou do mesmo banco o seu capital e juros, num total de 9 000 cruzeiros. Quanto ganhou de juros?

E' evidente que poderíamos resolver êste problema, calculando o capital inicial pela fórmula M, e subtraindo êste capital da soma 9 000 cruzeiros. Mas o nosso fim, neste parágrafo, é *calcular diretamente os juros,* isto é, calcular os juros sem calcular o capital.

Reduzindo o tempo à fração do ano, teremos:

$$5 \text{ an. } 6 \text{ m.} = \frac{5}{1} + \frac{6}{12} = \frac{5}{1} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \text{ do ano.}$$

Consideremos um capital qualquer, por exemplo, 100 cruzeiros; calculando os juros de 100 cruzeiros, em 5 anos e 6 meses, a 8% ao ano, teremos:

$$j = 100 \times 8 \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{100} = 44 \text{ cruzeiros}$$

Portanto, 100 cruzeiros, em 5 anos e 6 meses, a 8% ao ano, rendem 44 cruzeiros, e a soma de capital e juros será:

$$100 \text{ cruzeiros} + 44 \text{ cruzeiros} = 144 \text{ cruzeiros}$$

Temos agora de resolver o seguinte problema de regra de três:

Se a soma 144 cruzeiros contém 44 cruzeiros de juros, a soma 9 000 cruzeiros quanto contém de juros?

$$\text{D} \left\{ \begin{matrix} 144 & 44 \\ 9\,000 & x \end{matrix} \right\} \quad \therefore \quad 144 : 9\,000 :: 44 : x$$

$$x = \frac{9\,000 \times 44}{144} = 2\,750 \text{ cruzeiros}$$

Resposta. A soma 9 000 cruzeiros contém 2 750 cruzeiros de juros.

Fórmula. Para estabelecer a fórmula relativa ao problema acima, é necessário resolver o seguinte problema:

Um certo capital posto a render juros de **i**% *ao ano, durante* **t** *anos, elevou-se a uma certa quantia* s. *Determinar os juros.*

Já vimos (§ 90) que o capital 100, em t anos, a i% ao ano, rende it, e a soma de capital e juros é $100 + it$.

Resolvamos agora o seguinte problema de regra de três:

Se a soma $100 + it$ *contém* **it** *de juros, a soma* **s** *quanto contém de juros?*

$$D \begin{Bmatrix} 100 + it & it \\ s & x \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad 100 + it : s :: it : x$$

$$x = \frac{sit}{100 + it} \quad \therefore \quad j = \frac{sit}{100 + it} \qquad \text{(N)}$$

As fórmulas M e N são empregadas quando a unidade de tempo é o *ano*. Tomando-se como unidade de tempo o mês ou o dia, é necessário substituir o número 100 pelo número 1200 ou 36000.

Observação. Os dois problemas que acabámos de resolver (§§90 e 91) devem ser bem compreendidos, porque é neles que se resume o *desconto racional*. Quanto às fórmulas M e N, não é conveniente decorá-las; é preferível decorar as perguntas que lhes dão origem.

Para obter de pronto a fórmula M, decora-se a seguinte pergunta: se $100 + it$ começou com 100, s com quanto começou? $100 + it : 100 :: s : c$.

Em relação à fórmula N, decora-se a seguinte pergunta: se $100 + it$ contém os juros it, s que juros contém? $100 + it : it :: s : j$.

Exercícios. Série XLII

1. Depositei um certo capital em um banco que paga juros de 9 % ao ano. Ao cabo de 3 anos, 6 meses e 20 dias, retirei do banco o meu capital e os juros num total de 12 600 cruzeiros. Qual foi o capital por mim depositado no banco?

2. Um banco emprestou-me uma certa quantia, concedendo-me 90 dias de prazo e cobrando-me 12% de juros anuais. Ao cabo de 90 dias, entreguei ao banco 3 250 cruzeiros. Qual foi a quantia que o banco me emprestou?

3. Emprestei dinheiro a um amigo, cobrando-lhe os juros de $1\,{}^2/_3\%$ por trimestre. Decorridos 2 anos, 2 meses e 10 dias, recebi o meu dinheiro e os juros, num total de 20 000 cruzeiros. Quanto ganhei de juros?

92. Juros pelo método dos divisores fixos. Nas Caixas Econômicas e, em geral, nos estabelecimentos bancários ou comerciais, cujos funcionários têm numerosos cálculos de juros a fazer, os métodos indicados nos parágrafos anteriores para efetuar êstes cálculos são mais ou menos morosos. Eis por que, para calcular juros nesses estabelecimentos, adota-se um método especial denominado *método dos divisores fixos*. Vejamos em que consiste êste método.

Tomando como unidade de tempo o *dia*, a fórmula para calcular juros é

$$j = \frac{cid}{36\,000}$$

Supondo que uma Caixa Econômica pague *invariàvelmente* 5% de juros ao ano, teremos:

$$j = \frac{c \times 5 \times d}{36\,000} \quad \therefore \quad j = \frac{cd}{7\,200}$$

Com esta fórmula, os funcionários da Caixa Econômica simplificam extraordinàriamente o cálculo dos juros. Por exemplo, quais são os juros de 350 cruzeiros, a 5% ao ano, em 48 dias?

$$j = \frac{cd}{7\,200} \quad \therefore \quad j = \frac{350 \times 48}{7\,200} = \text{Cr.\$}\ 2{,}333$$

Representando o divisor fixo por D, teremos:

$$j = \frac{cd}{\text{D}}$$

A letra D representa o *divisor fixo*. Êste varia, naturalmente, de acôrdo com a taxa. Para a taxa 5, seu valor é $36\,000 \div 5$, isto é, 7200. Se a taxa fosse 6, o valor de D seria $36\,000 \div 6$, isto é, 6000.

De um modo geral *o divisor fixo é o quociente da divisão de* 36000 pela taxa.

Exercícios. Série XLIII

1. Calcular, pelo método dos divisores fixos, os juros de 324 cruzeiros, a 6 % em 72 dias.
2. Idem, para 612 cruzeiros, a 4,5%, em 80 dias.
3. Idem, para 728 cruzeiros, a 7,5%, em 105 dias.
4. Idem, para 1528 cruzeiros, a 9%, em 126 dias.

93. Taxa média de juros. Tenho 7200 cruzeiros rendendo juros de 8% ao ano, e 9600 cruzeiros rendendo juros de 12% ao ano. Portanto, tenho 16800 cruzeiros rendendo juros. A que *taxa única* deveria colocar estes 16800 cruzeiros para ganhar os mesmos juros que ganho nas condições indicadas?

E' êste o problema chamado *taxa média de juros.*

Calculemos os juros de 7 200 cruzeiros a 8% ao ano, e 9 600 cruzeiros a 12% ao ano.

$$j = \frac{7\,200 \times 8}{100} = 576 \qquad j = \frac{9\,600 \times 12}{100} = 1\,152 \text{ cruzeiros}$$

Portanto, os capitais 7 200 cruzeiros e 9 600 cruzeiros dão um rendimento anual de 1 728 cruzeiros. E' bastante, agora, resolver o seguinte problema:

A que taxa, 16 800 *cruzeiros rendem* 1 728 *cruzeiros, em um ano?*

$$i = \frac{100 \times 1\,728}{16\,800} = \frac{72}{7} = 10\,{}^{2}/_{7}\,\%$$

Observação. Quando os capitais são iguais, a taxa média é a média aritmética das taxas.

Exercícios. Série XLIV

1. Um proprietário tem duas casas avaliadas respectivamente em 42 000 e 60 000 cruzeiros. A primeira lhe rende anualmente 11% do seu valor, e a segunda, 16%. Qual é o rendimento médio e anual destas duas casas?

2. Um capitalista emprestou 25 000, 42 000 e 60 000 cruzeiros, a 5%, 8% e 10%. Qual é a taxa média dêstes três empréstimos?

3. Um negociante tem três contas a pagar, de 8 500, 12 000 e 18 000 cruzeiros. Pela primeira paga 7% de juros anuais, pela segunda 9% e pela terceira 10%. Qual é a taxa média dos juros pagos por êste negociante?

4. Empreguei $\frac{7}{12}$ do meu dinheiro a 6% ao ano e o restante a 10% ao ano. Qual é o rendimento anual do meu dinheiro?

Observação. Para resolver êste problema, considera-se um capital arbitrário, por exemplo, 100. No nosso caso é preferível considerar o capital 120, por ser múltiplo de 12.

GEOMETRIA INTUITIVA

CAPÍTULO V

Áreas

94. Área de uma figura plana. *Uma figura plana é uma figura geométrica cujos elementos, pontos e linhas, estão situados em um mesmo plano.* Já conhecemos algumas destas figuras. (E.M. P.V. capítulos I e II)

Vimos também em que consiste a área de uma figura plana (§§ 2, 7, 8 e 9) e quais os processos gerais para determiná-la, isto é, o processo direto e o indireto.

O processo direto é, em geral, impraticável para calcular a área de uma figura plana. Temos de recorrer ao processo indireto. *Êste consiste em medir certas* **linhas notáveis** *da figura dada, chamadas* **dimensões**, *e efetuar com os números obtidos, certos cálculos que variam de acôrdo com a figura cuja área se quer determinar.*

E' o que vamos aprender neste capítulo.

A forma de uma figura plana pode variar ao infinito ; entretanto, num curso elementar de Matemática aprendemos a determinar apenas a área de algumas figuras planas mais simples como sejam o *retângulo*, o *quadrado*, o *paralelogramo*, o *triângulo*, o *losango*, o *trapézio*, o *polígono* e o *círculo*.

Para calcular a área de uma figura plana é indispensável estabelecer **uma unidade de área.**

A unidade de área é um quadrado cujo lado é tomado como unidade de comprimento.

Esta correspondência entre as unidades de comprimento e de área é também indispensável. Assim, se tomarmos o *decímetro linear* como unidade de comprimento, a unidade de área será o *decímetro quadrado* e a área da figura plana dada será o número de **decímetros quadrados** (e de partes alíquotas do decímetro quadrado) que ela contém.

As unidades legais brasileiras para calcular a área de uma superfície plana limitada já são conhecidas. (§ 7)

95. Área do retângulo e do quadrado. Seja o retângulo ABCD cuja base AB mede 6cm e cuja altura AD mede 4cm. A partir do vértice A determinemos em AB assim como em AD, segmentos de um centímetro cada um. Pelos pontos de divisão tracemos paralelas à base e à altura. O retângulo ficará dividido em 24 quadrados iguais, cada um dos quais é um centímetro quadrado. E diremos que a área do retângulo ABCD é $24 cm^2$.

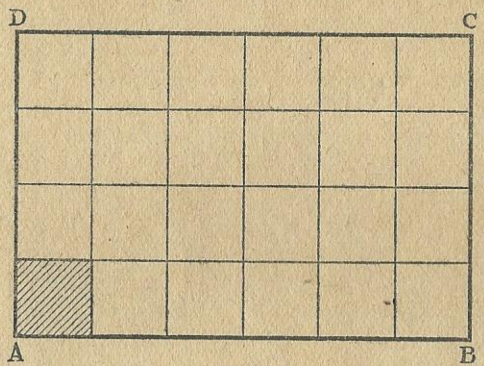


Fig. 9

Para calcular a área de um retângulo, medem-se a base e a altura com a mesma unidade de comprimento e multiplicam-se as duas medidas; o resultado é a área do retângulo, em unidades de área cujo lado é igual à unidade de comprimento escolhida.

Na linguagem corrente dizemos:

A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura (*ou do comprimento pela largura*).

A base (ou o comprimento) de um retângulo é geralmente o lado maior; a altura (ou a largura) é, de um modo geral, o lado menor. Estas denominações são relativas; por exemplo, no retângulo MNPR (fig. 10), a base, MN é o lado menor; a altura, MR, é o lado maior.

Representando a área de um retângulo por **s**, a base por **b** e a altura por **h**, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = b \times h}$$

Desta fórmula deduzimos:

$$\boxed{b = \frac{s}{h} \qquad h = \frac{s}{b}}$$

Estas duas fórmulas nos dizem que:

Conhecendo a área e a base (ou a altura) de um retângulo, é bastante dividir a área pela base (ou pela altura) para determinar a outra dimensão.

Dois retângulos são **iguais** *quando, sendo superpostos, coincidem em toda a sua extensão.*

Dois retângulos são **eqüivalentes** *quando têm a mesma área.* Assim os retângulos ABCD (fig. 9) e MNPR (fig. 10) são eqüivalentes porque têm a mesma área: 24cm^2.

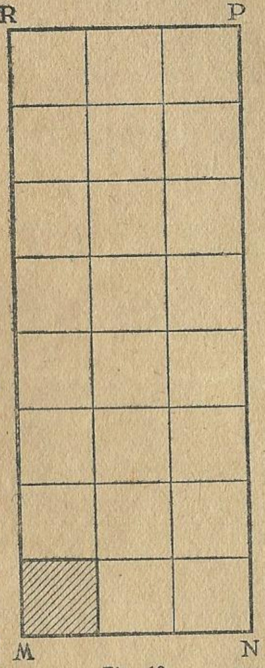


Fig. 10

Dois retângulos eqüivalentes nem sempre são iguais; mas, dois retângulos iguais são sempre eqüivalentes.

A **igualdade** de dois retângulos e, em geral, de duas figuras geométricas quaisquer, depende da **forma** destas figuras; a **eqüivalência** depende da **área.**

Para calcular a área de um quadrado ABCD (fig. 11) é bastante medir o comprimento de um de seus lados, por exemplo, de AB, e multiplicar êste comprimento por si mesmo. Em outras palavras:

A área de um quadrado é igual à **segunda potência** *do número que representa a medida do lado do mesmo quadrado.*

Eis por que a *segunda potência* de um número é também chamada *quadrado dêste número.*

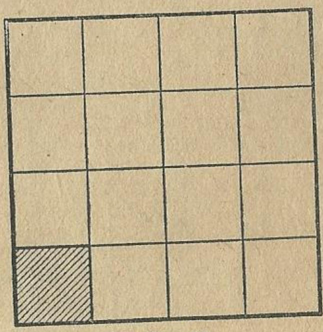


Fig. 11

Representando a área de um quadrado por s e o lado por l, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = l^2}$$

Desta fórmula deduzimos a seguinte:

$$\boxed{l = \sqrt{s}}$$

O lado de um quadrado é igual à raiz quadrada da área dêste mesmo quadrado.

Exercícios. Série XLV

Observação. Pedindo-se o comprimento de um segmento retilíneo, se êste não puder ser calculado exatamente, será sempre calculado com êrro inferior a um milímetro, salvo aviso em contrário.

1. O perímetro de um retângulo mede 436m. Calcular a área, sabendo que a diferença entre as duas dimensões é de 24m.

2. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 516m, sabendo que a diferença entre as duas dimensões é de 36m.

3. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 37,46m, sabendo que entre as duas dimensões do retângulo há uma diferença de 3,514m.

4. Um retângulo tem uma área de 47,5625m². O comprimento mede 9,32m. Calcular a largura.

5. Um retângulo e um quadrado são eqüivalentes. O retângulo mede 13,6m por 7,4m. Calcular o lado do quadrado.

6. A área de um retângulo é 56,3740m². Medindo a largura 8,4m, calcular o comprimento.

7. Um quadrado e um retângulo são eqüivalentes. A área do quadrado é 74,36m². A base do retângulo mede 12,6m. Calcular a largura.

8. A soma das áreas de dois quadrados é 516,48m² e a diferença é 37,44m². Calcular o lado de cada um dos quadrados.

9. Calcular o valor de um terreno retangular que mede 248m por 73m, admitindo que um hectare dêste terreno valha 4 360 cruzeiros.

10. Comprei um terreno retangular medindo 216,8m por 72,5m, pagando 6 345 cruzeiros por hectare. Por quanto devo vendê-lo para realizar um lucro de Cr.$ 0,40 por centiare?

11. Um terreno retangular tem um perímetro de 745m. A diferença entre as duas dimensões do terreno é de 42m. Calcular o valor dêste terreno, admitindo que cada m² do mesmo valha Cr.$ 48,50.

12. Uma mesa retangular mede 2,40m por 1,15m. Quero cobrí-la com um oleado o qual deve medir 0,45m mais que a mesa nos dois sentidos. Qual será a minha despesa, se cada metro quadrado de oleado custa Cr.$ 6,40?

13. O lado de um terreno quadrado mede 615m. Constroem-se casas ao longo do perímetro dêste terreno, ficando no interior do mesmo um grande quadrado reservado para uma praça de esportes, e cujos lados, paralelos aos lados do quadrado primitivo, dêle distam 42m. Qual é a área desta praça?

14. Um jardim quadrado mede 124,56m de lado. E' dividido em 4 quadrados iguais por duas avenidas perpendiculares entre si, e cuja largura mede 3,6m. Calcular a área de cada um dos quadrados.

15. Uma chácara retangular mede 148m por 84m. Em redor da chácara há um caminho interior com 2,4m de largura; (fig. 12) duas ruas, perpendiculares entre si, também com 2,4m de largura, dividem a chácara em 4 partes iguais. Calcular a área da parte desta chácara destinada às plantações.

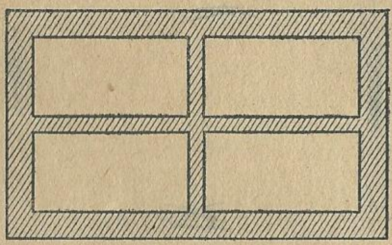


Fig. 12

96. Área do paralelogramo. Consideremos o paralelogramo ABCD. (E.M.P.V. § 36) **Base** *de um paralelogramo é qualquer um de seus lados.* **Altura** *de um paralelogramo é um segmento de reta, perpendicular à base e limitado por esta base e pela base oposta.* No paralelogramo ABCD, tomando como base o lado AB, a altura pode ser o segmento DM ou o segmento CN, ou qualquer outro segmento perpendicular à base AB, traçado por qualquer ponto do lado CD ou dos prolongamentos dêste lado.

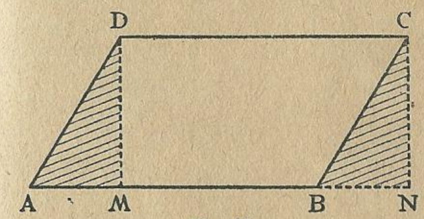


Fig. 13

Dado o paralelogramo ABCD, tomemos como base o lado AB, e tracemos duas alturas, a saber: DM e CN. Formaremos assim o retângulo MNCD e dois triângulos: AMD e BNC. Se recortarmos o triângulo AMD e o colocarmos sôbre o triângulo BNC, veremos que êstes dois triângulos coincidem, e são, portanto, iguais. Logo, podemos concluir que o paralelogramo ABCD e o retângulo MNCD são duas figuras eqüivalentes. Portanto,

área paralelogramo ABCD = área retângulo MNCD

Mas,

área retângulo MNCD = MN $\times$ DM

Logo,

área paralelogramo ABCD = MN $\times$ DM

Vamos agora mostrar que **MN = AB.**

Com efeito, MN = MB + BN

AB = MB + AM

Mas, sendo BN = AM, resulta que MN = AB.

E concluímos enfim que:

área paralelogramo ABCD = AB $\times$ DM

A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Representando a área de um paralelogramo por s, a base por b e a altura por h, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = b \times h}$$

Observação. As dimensões de um paralelogramo são a base e a altura.

Exercícios. Série XLVI

1. Calcular em m², a área de um paralelogramo que mede 27,85dam de base e 8 156cm de altura.

2. A área de um paralelogramo é 36,54m². A base mede 11,6m. Calcular a altura.

3. Um paralelogramo cuja base mede 7,56m e cuja altura mede 3,16m é eqüivalente a um quadrado. Calcular o lado do quadrado.

4. Um paralelogramo cujas base e altura medem respectivamente 13,6m e 7,25m é eqüivalente a um retângulo cuja altura mede 6,22m. Calcular a base do retângulo.

5. Calcular em ares a área de um terreno com a forma de um paralelogramo, e que mede 647,8m de bâse por 235,6m de altura.

6. A área de um paralelogramo é 576,60m². Calcular as duas dimensões, sabendo que elas são proporcionais aos números 3 e 5.

Solução. Sejam x e y as duas dimensões do paralelogramo. Sendo elas proporcionais aos números 3 e 5, podemos escrever:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$$

Recorrendo *às propriedades das proporções* (§ 62, 8.ª, observação) teremos:

$$\frac{xy}{15} = \frac{x^2}{9}$$

Porém, xy é a área do paralelogramo, isto é, 576,60m².

Portanto,

$$\frac{576,60}{15} = \frac{x^2}{9} \quad \therefore$$

$$x^2 = \frac{9 \times 576,60}{15} \quad \therefore$$

$$x^2 = 345,96 \quad \therefore$$

$$x = \sqrt{345,96} \quad \therefore$$

$$x = 18,6$$

Está calculada uma das dimensões do paralelogramo; é 15,6m. Para calcular y, teremos sucessivamente:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} \quad \therefore \quad \frac{18,6}{9} = \frac{y}{5} \quad \therefore$$

$$y = \frac{5 \times 18,6}{3} = 31$$

A base e a altura do paralelogramo dado medem respectivamente 18,6m e 31m.

7. A área de um paralelogramo é 48,56m². Calcular as duas dimensões, sendo elas proporcionais aos números 3 e 5.

97. Área do triângulo. Já definimos o triângulo, assim como a base e a altura desta figura. (E.M.P.V. §§ 31 a 33)

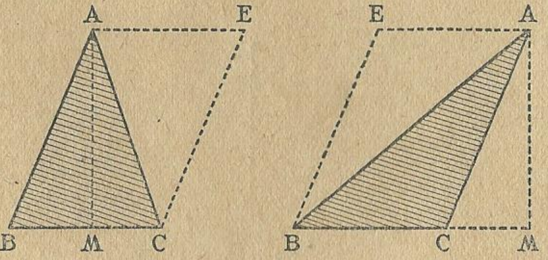


Fig. 14

Consideremos o triângulo ABC. Tomando como base o lado BC, a altura será o segmento AM. (fig.14) Pelo vértice A tracemos uma paralela ao lado BC; pelo vértice C tracemos uma paralela ao lado AB (no triângulo da esquerda) e pelo vértice B tra-

cemos uma paralela ao lado AC. (no triângulo da direita) Estas paralelas se encontram num ponto E e, em qualquer dos dois casos formaremos um paralelogramo ABCE (ou AEBC) cuja base é BC e cuja altura é AM.

Isto pôsto, recortando o paralelogramo e, em seguida dividindo-o em duas partes, ao longo da diagonal AC (ou AB) verificaremos pela superposição que os triângulos ABC e ACE (ou ABC e AEB) são iguais. Ora, se a área do paralelogramo ABCE (ou AEBC) é igual ao produto da base BC pela altura AM, conclue-se que a área do triângulo ABC é igual à metade dêste produto. Portanto,

A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura do mesmo triângulo.

Representando a área de um triângulo por ***s***, a base por ***b*** e a altura por ***h***, podemos escrever:

$$s = \frac{bh}{2} \qquad s = \frac{b}{2} \times h \qquad s = b \times \frac{h}{2}$$

Sendo dadas a área e a base (ou a altura) de um triângulo, podemos calcular a altura (ou a base) de acôrdo com as seguintes fórmulas:

$h = 2s \div b$	$h = s \div \frac{b}{2}$
$b = 2s \div h$	$b = s \div \frac{h}{2}$

Exercícios orais

Calcular a área dos triângulos cujas bases e alturas medem respectivamente:

1. 7m e 4,6m	**3.** 12m e 3,6m	**5.** 6,5m e 8m
2. 4,2m e 5m	**4.** 10m e 5,4m	**6.** 9,4m e 6m

Nos exercícios que se seguem são dadas a área e uma das dimensões de um triângulo ; calcular a outra.

7. 21m^2 e 7m	**9.** 20m^2 e 8m	**11.** 36m^2 e 9m
8. 28m^2 e 4m	**10.** 15m^2 e 6m	**12.** 40m^2 e 10m

Exercícios. Série XLVII

1. Calcular a área de um triângulo com 36,7dam de base e 576dm de altura.

2. Calcular, em hectares, a área de um terreno triangular com 428,7m de base e 136,8m de altura.

3. Um triângulo, com uma área de 726,50m^2 tem uma base que mede 31,6m. Calcular a altura.

4. A base de um triângulo mede 53,6m. Calcular a altura sabendo que a área do triângulo é 3 148,36m^2.

5. Pedro tem um terreno triangular com 47,6m de base e 54,8m de altura, avaliado em Cr.$ 4,40 por metro quadrado. Carlos tem um terreno retangular medindo 51,6m por 28,5m, avaliado em Cr.$ 4,30 por metro quadrado. Os dois proprietários resolvem trocar seus terrenos. Determinar qual dos dois é o devedor, e de quanto.

6. Vendí um terreno triangular com 48,5m de base e 64,7m de altura, à razão de Cr.$ 7,20 por metro quadrado. Com a importância recebida comprei um terreno retangular avaliado em Cr.$ 8,50 por metro quadrado e com 33,6m de comprimento. Calcular a largura dêste terreno,

7. Um triângulo tem 17,26m de base e 23,56m de altura. Calcular o lado de um quadrado eqüivalente.

8. A área de um triângulo é 35,48m^2. Calcular as duas dimensões do triângulo, sabendo que elas são proporcionais aos números 4 e 7.

98. Area do losango. Já definimos o losango, assim como as propriedades das suas diagonais. (E.M.P.V. § 37) O losango é um paralelogramo e, portanto, podemos calcular a sua área, medindo a base e a altura e multiplicando os dois números obtidos. Entretanto, as diagonais do losango sendo perpendiculares entre si, e dividindo-se mùtuamente em partes iguais, vamos deduzir destas duas propriedades uma regra interessante para calcular a área dêste quadrilátero.

O losango ABCD (fig.15) é constituído por dois triângulos, isto é, ABD e CBD. Podemos tomar como base de ambos, a diagonal BD. Sendo AC perpendicular a BD, a altura do triângulo ABD será AM, e a do triângulo CBD será CM.

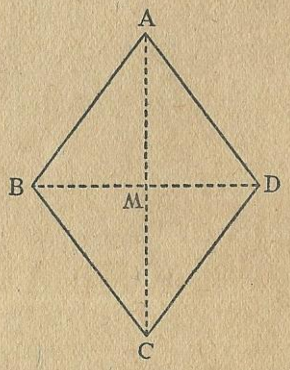


Fig. 15

Isto pôsto, teremos:

área losango ABCD = *área triângulo* ABD + *área triângulo* CBD

$$= \frac{BD}{2} \times AM + \frac{BD}{2} \times CM$$

$$= \frac{BD}{2} \times (AM + CM)$$

$$= \frac{BD}{2} \times AC$$

$$= \frac{AC \times BD}{2}$$

Portanto, *a área de um losango é igual à metade do produto das suas diagonais.*

Representando a área do losango por s, a diagonal maior por D e a menor por d, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = \frac{D \times d}{2}}$$

Quando nos convier podemos escrever:

$s = \frac{D}{2} \times d$	$s = D \times \frac{d}{2}$

Conhecendo a área do losango e uma das diagonais, podemos calcular a outra, de acôrdo com as fórmulas seguintes:

$D = 2\,s \div d$	$d = 2\,s \div D$

Exercícios. Série XLVIII

1. Calcular a área de um losango cujas diagonais medem 23,6m e 15,8m.

2. A soma das diagonais de um losango é 76,48m. Sua diferença é 15,24m. Calcular a área do losango.

3. A soma das diagonais de um losango é 123,4m. A diagonal maior contém 4 vêzes a menor. Calcular a área do losango.

4. A diagonal menor de um losango é a quinta parte da maior. A soma das duas é 73,44m. Calcular a área do losango.

5. A área de um losango é $7{,}4261m^2$. Uma das diagonais mede 4,73m. Calcular a outra.

6. A área de um losango é $181{,}72m^2$. Uma das diagonais mede 23,6m. Calcular a outra.

7. A área de um losango é $47{,}56m^2$. Uma das diagonais mede 14,3m. Calcular a outra.

8. A área de um losango é $3{,}5624m^2$. Uma das diagonais mede 3,12m. Calcular a outra.

9. Os vitraux de um edifício são formados por 3 472 losangos, cujas diagonais medem 0,18m e 0,12m. Calcular a área total dos vitraux.

10. Para pavimentar um vestíbulo com 5,40m de comprimento, foram necessários 1 350 losangos cujas diagonais medem 0,24m e 0,15m. Calcular a largura do vestíbulo.

11. Na pavimentação de um corredor foram empregados 725 losangos cujas diagonais medem 0,26m e 0,15m. Um cento de ladrilhos custa 72 cruzeiros, e o operário ganha 15 cruzeiros por m^2 de pavimentação. Qual foi a despesa total?

12. A área de um losango é $36{,}70m^2$. Calcular as duas diagonais, sabendo que são proporcionais aos números 7 e 13.

99. Área do trapézio. Já definimos o trapézio. (E.M.P.V. § 38) Neste quadrilátero, sòmente dois lados opostos são paralelos; os lados AB e CD. (fig. 16)

Base *de um trapézio é um dos lados paralelos;* AB *ou* CD. Estes dois lados sendo sempre diferentes, diremos que AB é a **base maior** e CD, a **base menor.**

Altura *de um trapézio é o segmento perpendicular às bases e limitado por elas.* No trapézio ABCD a altura é o segmento DM ou o segmento BN. Com efeito, a figura BNDM é um retângulo; portanto, MD = BN.

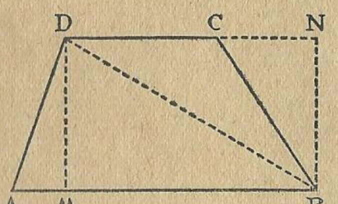


Fig. 16

Vejamos agora como se calcula a área de um trapézio. Traçando a diagonal BD, o trapézio ABCD fica dividido em dois triângulos: os triângulos ABD e BCD. Ora:

área trapézio ABCD = *área triângulo* ABD + *área triângulo* BCD

$$= \frac{AB}{2} \times DM + \frac{CD}{2} \times BN$$

Porém, sendo DM = BN, podemos escrever:

$$\textit{area trapézio } \mathrm{ABCD} = \frac{\mathrm{AB}}{2} \times \mathrm{DM} + \frac{\mathrm{CD}}{2} \times \mathrm{DM}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{CD}}{2}\right) \times \mathrm{DM}$$

$$= \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{CD}}{2} \times \mathrm{DM}$$

Portanto, *a área de um trapézio é igual à semíssoma das bases, multiplicada pela altura.*

Observemos que *semíssoma das bases* é o mesmo que *média aritmética das bases.* (§ 60, corolário IV)

Representando a área de um trapézio por s, a base maior por B, a menor por b e a altura por h, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = \frac{B + b}{2} \times h}$$

Exercícios. Série XLIX

1. Calcular a área de um trapézio com 0,74m de altura, e cujas bases medem 3,7m e 2,54m.

2. Um terreno tem a forma de um trapézio, cujas bases medem 342m e 258m. A altura mede 135m. Calcular o valor dêste terreno, supondo que um m² valha 12 cruzeiros.

3. Um terreno tem a forma de um trapézio. Suas bases medem 148m e 96m; a altura mede 64m. Êste terreno foi avaliado em 80 000 cruzeiros. Calcular o preço de um metro quadrado.

4. Um campo em forma de trapézio tem 54m de altura. Suas bases medem 136m e 72m. Supondo que êste terreno possa produzir 625 litros de trigo, por are, calcular o valor da colheita, admitindo que um litro de trigo custe Cr.$ 1,20.

5. A área de um trapézio é de 529,48m². A altura mede 12,4m. Calcular as duas bases, sabendo que sua diferença é 5,8m.

Sugestão. $\frac{B+b}{2} = s \div h \quad \therefore \quad B + b = 2(s \div h)$

6. Um trapézio, com uma área de 643,56m², tem 15m de altura. Calcular as duas bases, sabendo que sua diferença é de 6,4m.

100. Área do polígono. O polígono já foi definido. (E.M. P.V. § 30) Um polígono pode ser regular ou irregular.

Um **polígono** *é* **regular** *quando todos os seus lados e ângulos são iguais.* O triângulo equilátero e o quadrado são polígonos regulares. O retângulo e o losango não são polígonos regulares, porque no primeiro os ângulos são iguais, mas os lados não são iguais, e no segundo os lados são iguais, mas os ângulos não são iguais.

Um polígono cujos lados ou cujos ângulos não são todos iguais é um **polígono irregular.**

Para calcular a área de um polígono qualque é necessário decompô-lo em triângulos. Consideremos o quadrilátero ABCD. Traçando a diagonal AC, o quadrilátero ficará decomposto em dois triângulos, cujas alturas respectivas são DM e BN. Calculando a área de cada um dêstes triângulos, e somando as duas áreas, teremos a área do quadrilátero. (*)

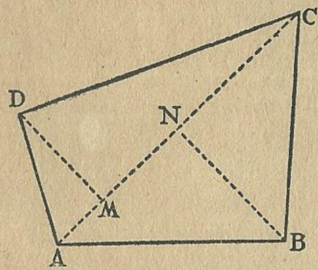


Fig. 17

Exercícios. Série L

1. Supondo que a fig. 17 representa um campo, no qual AC = 236,4m e as alturas DM e BN medem respectivamente 75,2m e 114,6m, calcular a área do campo.

2. A figura ABCD (fig. 18) é um quadrado cujo lado mede 8,25m. O segmento EF, perpendicular ao lado AD, mede 12,4m. Calcular a área do polígono ABECD.

3. Na figura 19, temos EC paralela a AB; AB = BD, assim como MB = MD.

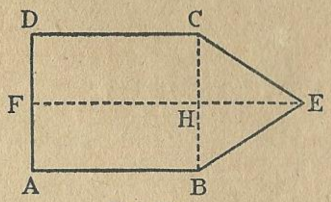


Fig. 18

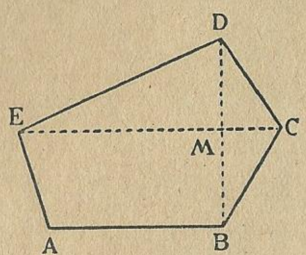


Fig. 19

(*) Não nos parece possível, por ora, ensinar a regra conhecida para calcular a área de um polígono regular.

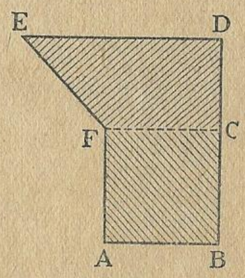


Fig. 20

Temos mais AB = 15,2m e EC = 21,4m. Calcular a área do polígono ABCDE.

4. A figura 20 representa um campo no qual AB = 42,5m, BD = 80m e CD = 61,4m. O segmento AB é igual ao segmento AF. Os ângulos A, B e D são retos. FC é perpendicular a BD. Supondo que o metro quadrado dêste terreno custe Cr.$ 3,20 pede-se o valor de todo o terreno.

101. Área do círculo. *Para calcular a área de um círculo, multiplica-se o quadrado do raio pelo número* π.

Observação. π, letra grega que se lê *pi*, representa o número 3,14 que é uma razão aproximada entre a circunferência e o seu diâmetro. (E.M.P.V. § 28)

Consideremos a circunferência do centro O e raio OA. (fig. 21) O raio desta circunferência mede 0,2m. Para calcular a área do círculo, é bastante elevar 0,2 ao quadrado, e multiplicar o resultado por 3,14. Teremos:

$$0{,}2^2 \times 3{,}14 = 0{,}04 \times 3{,}14 = 0{,}1256$$

Portanto, a área da figura 21 é $12 dm^2$ e $56 cm^2$.

Representando a área de um círculo por s e o raio por r, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

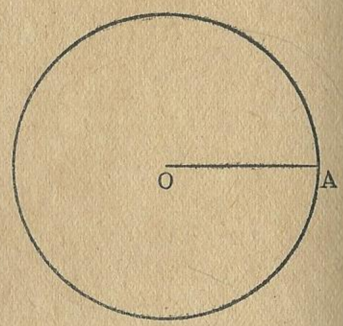


Fig. 21

$$\boxed{s = \pi r^2}$$

Exercícios. Série LI

1. Calcular a área de um círculo cujo raio mede 3,16m.
2. Calcular a área de um círculo cujo diâmetro mede 7,28m.
3. A área de um círculo é $38{,}4650 m^2$. Calcular o raio.

Sugestão. $r^2 = \dfrac{s}{\pi} \quad \therefore \quad r = \sqrt{\dfrac{s}{\pi}}$

4. A área de um círculo é $43{,}5725 m^2$. Calcular o raio.
5. A área de um círculo é $58{,}0586 m^2$. Calcular o comprimento da circunferência.

6. A área de um círculo é 52,7328m². Calcular o comprimento da circunferência.

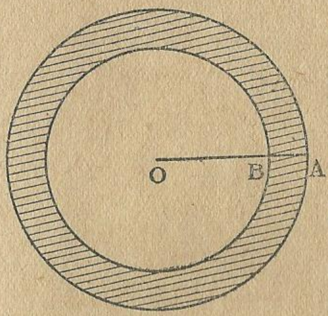


Fig. 22

7. Calcular a área de uma corôa, sabendo que o raio da circunferência maior mede 4,15m e o da menor, 3,75m.

Observação. *Duas circunferências são concêntricas quando têm o mesmo centro.*

Corôa *é a porção de superfície plana limitada por duas circunferências concêntricas.* (fig. 22)

8. Um tanque circular cujo raio mede 7,2m é cercado por um passeio cuja largura mede 1,2m. Qual é a área dêste passeio?

9. O lado de um terreno quadrado mede 31,2m. No interior dêste terreno há um lago cujo diâmetro mede 16,2m. Calcular a área livre dêste terreno.

10. Um retângulo mede 31,6m por 23,2m. Tira-se de cada canto do retângulo um quadrante (a quarta parte de um círculo) cujo raio mede 2,5m. Qual é a área que resta para o retângulo? (fig. 23)

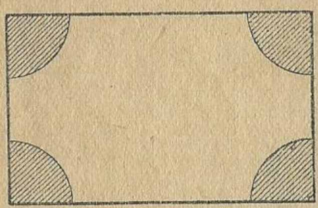


Fig. 23

102. Unidades inglesas de área. As principais, com os seus coeficientes, isto é, com os seus valores correspondentes em metros quadrados, são as seguintes:

the square inch (a polegada quadrada). .	0,000 645 16m²
the square foot (o pé quadrado).	0,092 896 94m²
the square yard (a jarda quadrada) . . .	0,836 097m²
the square perch or rod (a vara quadrada)	25,291 939m²
the rood (1 210 *square yards*)	1 011,677 5m²
the acre (4 840 *square yards*)	4 046,710 0m²
milha inglesa quadrada	2 589 894,447 362m²

Exercícios. Repetir os exercícios das séries 45 a 51, substituindo as unidades nacionais pelas inglesas, de acôrdo com as indicações dos srs. professores.

Capítulo VI

Volumes

103. Volume do bloco retangular e do cubo. Já vimos em que consiste o volume de um sólido geométrico e como se determina o volume de um bloco retangular e o de um cubo. (§§ 12 a 21)

O processo para determinar o volume de um sólido geométrico é o indireto. (§ 2) Por exemplo, no caso do bloco retangular, medimos três arestas chamadas respectivamente **comprimento, largura** e **altura** do bloco, *tendo o cuidado de adotar a mesma unidade de comprimento* para efetuar estas medições. Depois, multiplicando os três números resultantes, teremos o volume do bloco retangular em cubos cuja aresta é igual à unidade adotada para medir as três dimensões do bloco.

Para calcular o volume de um sólido geométrico é indispensável estabelecer **uma unidade de volume.**

A unidade de volume é um cubo cuja aresta é tomada como unidade de comprimento.

Tomando como unidade o **decímetro linear**, a unidade de volume será o **decímetro cúbico**, e o volume do sólido geométrico dado será o número de **decímetros cúbicos** (e de partes alíquotas do decímetro cúbico) que êle contém.

Já vimos quais são as medidas legais brasileiras para calcular o volume de um sólido geométrico. (§§ 12 a 21)

Representando por v o volume de um bloco retangular ou de um cubo; por c, l e h as três dimensões do bloco; por B a

base do mesmo bloco e por a a aresta de um cubo, podemos estabelecer as seguintes fórmulas:

$v = c \times l \times h$	$v = B \times h$	$v = a^3$

O volume de um cubo é a terceira potência do comprimento da aresta. Eis por que a **terceira potência** de um número é também chamada **cubo** dêste número.

Exercícios. Série LII

1. Calcular o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,4m, 27dm e 5,25m.

2. Em um bloco retangular, a largura é a metade do comprimento, e a altura é o quíntuplo do comprimento. A soma das três dimensões é 43,512m. Pede-se o volume do bloco.

3. O volume de um bloco retangular é 186,825m³. A altura mede 7,5m. Pede-se a área da base.

Sugestão. $v = B \times h \quad \therefore \quad B = v \div h$

4. O volume de um bloco retangular, com 7,2m de altura, é 123,456m³. Pede-se a área da base.

Observação. Se o resultado de um problema é uma área, e esta não pode ser obtida exatamente, deverá ser calculada, salvo aviso em contrário, com êrro inferior a 0,0001m².

5. O volume de um bloco retangular, com 5,6m de altura, é 13,552m³. Calcular as dimensões da base, sabendo que uma é o dôbro da outra.

6. As três dimensões de um bloco são proporcionais aos números 2, 5 e 8, e sua soma é 26,85m. Calcular o volume do bloco.

7. A aresta de um cubo de granito mede 1,36m. Um dm³ dêste granito pesa 5,370kg. Calcular o pêso do cubo.

8. A aresta de um cubo de pedra mede 0,75m. Calcular o valor dêste cubo, se 1m³ custa 55 cruzeiros.

9. A aresta de um reservatório de forma cúbica mede 2,5m. Contém azeite (cuja densidade é 0,915) faltando, porém, 22cm para que o reservatório fique completamente cheio. Calcular o pêso do azeite.

10. A aresta de um cubo de chumbo mede 0,42m. Transforma-se êste cubo em uma fôlha com uma espessura de 2,5mm. Calcular a superfície da fôlha.

104. O volume de um prisma. O prisma já foi definido. (E.M.P.V. § 40) Para calcular o volume de um prisma, reto ou oblíquo, é bastante multiplicar a área da base pela altura.

Suponhamos que a nossa figura representa um prisma reto tendo por base um losango. A altura do prisma mede 7,2m. As diagonais da base medem respectivamente 1,6m e 1,2m. Para calcular o volume dêste prisma devemos calcular em primeira lugar, a área da bse. Ora,

$$\textit{área losango } \mathrm{ABCD} = \frac{1{,}6 \times 1{,}2}{2}$$
$$= 0{,}96\mathrm{m}^2 \ (\S\, 98)$$

Conhecida a área da base, teremos:

$$\textit{volume prisma } \mathrm{AG} =$$
$$= 0{,}96 \times 7{,}2 = 6{,}912\mathrm{m}^3$$

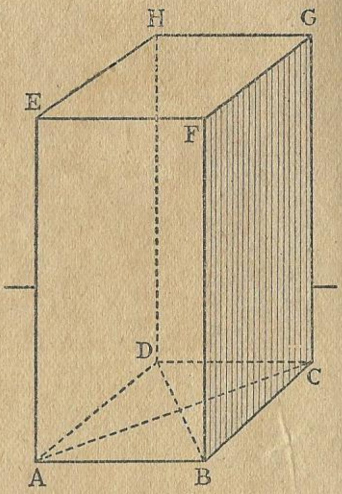


Fig. 24

Representando o volume de um prisma por v, a base por b e a altura por h, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{v = b \times h}$$

Exercícios. Série LIII

1. Um prisma reto com 6,5m de altura, tem por base um paralelogramo cuja base mede 2,4m e cuja altura mede 1,4m. Calcular o volume do prisma.

2. A base de um prisma reto é um paralelogramo cuja base mede 4,5m e cuja altura mede 3,2m. O volume do prisma é 120,960m³. Calcular a altura do prisma.

3. Um prisma reto tem por base um losango cujas diagonais medem 0,42m e 0,35m. Calcular o volume dêste prisma, cuja altura mede 2,5m.

4. Um terreno tem a forma de um trapézio cujas bases medem respectivamente 42,7m e 28,5m, e cuja altura mede 16,4m. Sôbre êste terreno espalha-se uniformemente uma camada de areia, com 2,5cm de espessura. Calcular o volume de toda a areia.

5. Um prisma reto com 12,4m de altura, tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 4,3m e 2,5m. Calcular o volume do prisma.

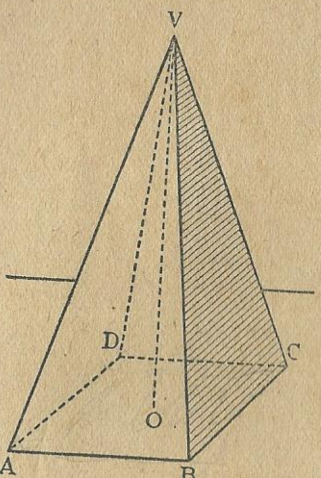


Fig. 25

105. O volume de uma pirâmide. A pirâmide já foi definida. (E.M.P.V. § 40) Para calcular o volume de uma pirâmide, multiplica-se a área da base pela altura, e divide-se o produto por três.

A nossa figura representa uma pirâmide tendo por base um quadrado. Suponhamos que o lado dêste quadrado mede 1,5m e que a altura, VO, da pirâmide, mede 6,4m. A área da base é $1,5 \times 1,5$, isto é, $2,25m^2$. O volume da pirâmide será:

$$volume = \frac{2,25 \times 6,4}{3} = 4,800m^3$$

Representando por $\boldsymbol{v}$ o volume de uma pirâmide, por $\boldsymbol{b}$ a base e por $\boldsymbol{h}$ a altura, podemos estabelecer que:

$v = \dfrac{b \times h}{3}$	$v = \dfrac{b}{3} \times h$	$v = b \times \dfrac{h}{3}$

Exercícios. Série LIV

1. Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões são 3,2m e 2,5m. Calcular o volume da pirâmide cuja altura mede 10,4m.

2. Uma pirâmide de pedra, com 2,4m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 0,80m. Calcular o pêso da pirâmide, supondo que a densidade da pedra seja 2,5.

3. A Grande Pirâmide ou Pirâmide de Ghizeh, com 146,5m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 233m. Calcular o volume da pirâmide e o seu pêso, admitindo que o material empregado na sua construção pese 3 000kg por metro cúbico.

4. Uma pirâmide com 1,6m de altura tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 0,42m e 0,36m. Calcular o volume da pirâmide.

5. Uma pirâmide com 4,5m de altura e $1,470m^3$ de volume, tem por base um retângulo no qual uma das dimensões é o dôbro da outra. Calcular as duas dimensões da base.

Sugestão. $v = b \times \dfrac{h}{3} \quad \therefore \quad b = v \div \dfrac{h}{3}$

106. Volume do cilindro de revolução. Êste sólido já foi definido. (E.M.P.V. § 40) O volume de um cilindro de revolução é calculado como o de um prisma, isto é, multiplica-se a área da base, pela altura. Mas, a base de um cilindro de revolução é um círculo, cuja área é πr^2. (§ 101) Portanto, representando por $\boldsymbol{v}$ o volume de um cilindro, por $\boldsymbol{r}$ o raio OA da base, e por $\boldsymbol{h}$ a altura OC do mesmo cilindro, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

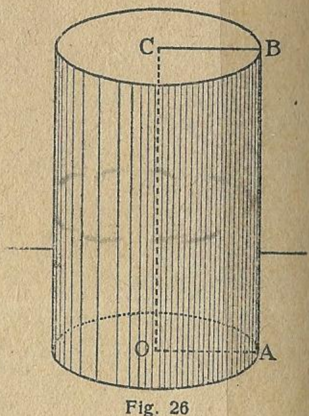


Fig. 26

$$\boxed{v = \pi r^2 h}$$

Observação. $\pi = 3{,}14$.

Exercícios. Série LV

1. O raio da base de um cilindro de revolução, com 4,7m de altura, mede 1,2m. Calcular o volume do cilindro.

2. Um reservatório cilíndrico mede 6,5m de raio e 2,25m de profundidade. Contém $^4/_5$ de sua profundidade em água. Calcular, em hectolitros, o volume da água.

3. Uma coluna cilíndrica com 8,4m de altura, tem um diâmetro de 0,30m. Qual é o seu volume?

4. Em um vaso cilíndrico cujo diâmetro interior mede 0,2m despejam-se 75,36 litros de água. Calcular a altura do vaso.

Sugestão. $v = \pi r^2 h \quad \therefore \quad h = v \div \pi r^2$. Fazer $\pi = 3{,}14$

5. Suponhamos que um cilindro de revolução seja ôco. O diâmetro exterior dêste sólido mede 0,48m e o interior, 0,36m. A altura dêste sólido é de 2,20m. Qual é o seu volume?

6. Um cilindro de revolução tem 15m de altura. A circunferência da base mede 7,536m. Calcular o volume do cilindro.

107. Volume do cone de revolução. Já vimos o que é um cone de revolução. (E.M.P.V. § 40) Para calcular o volume de um cone de revolução, procede-se como em relação à pirâmide, isto é, multiplica-se a área da base pela altura do cone, e divide-se

PEQUENO DICIONÁRIO
Inglês-Português

por

NUNO SMITH DE VASCONCELLOS

(Dirigente do Ensino de Inglês do Colégio Pedro II)

Com cerca de quarenta mil palavras modernas, expressões idiomáticas e termos técnicos que não se encontram em nenhum outro dicionário de sua classe, o PEQUENO DICIONÁRIO INGLÊS-PORTUGUÊS do Prof. Nuno Smith de Vasconcellos, é um instrumento de trabalho indispensável a todos aqueles que desejam falar e escrever corretamente a lingua inglesa.

Edição escolar (volume cartonado) . . . . . Cr $ 16,00
Volume encadernado em percalina . . . . . Cr $ 25,00

Edição da

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

São Paulo – Rio de Janeiro – Recife – Porto Alegre

São Paulo Editora Limitada, *imprimiu*

Preço dêste vol. Cr $ 14,00